

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Martin ZERNER

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES HARTOG ET SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS.
SOLUTIONS SINGULIÈRES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 juin 1963, devant la Commission d'Examen.

MM. LERAY	<i>Président.</i>
BRUHAT	} <i>Examineurs.</i>
MALGRANGE	

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1963

IE A, n° 4108
° D'ORDRE :
4958

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Martin ZERNER

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES HARTOG ET SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS.
SOLUTIONS SINGULIÈRES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 juin 1963, devant la Commission d'Examen.

MM. LERAY	} <i>Président.</i>	
BRUHAT		} <i>Examineurs.</i>
MALGRANGE		



PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1963



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	FELDMANN.....	T	Biologie Végétale marine.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparée.	GUINIER.....	T	Physique des Solides (Orsay).
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique	FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
WYART.....	T	Minéralogie et Cristal.	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	CHOUARD.....	T	Physiologie Végétale.
MANGENOT.....	T	Biologie Végétale (Orsay).	MALAVARD.....	T	Aviation (Technique Aéronaut.).
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
MONNIER.....	T	Physiologie Générale.	NORMANT.....	T	Chimie organique.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	BÉNARD.....	T	Chimie Minérale.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	DUGUÉ.....	T	Statistiques Mathématiques.
LAFFITE.....	T	Chimie générale.	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	ULRICH.....	T	Physiologie Végétale.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et Appliquées.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie Animale (S. P. C. N.).	KIRRMANN.....	T	Théories Chimiques.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
DRACH.....	T	Zoologie.	M ^{lle} LE BRETON.....	T	Physiologie de la nutrition.
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).	SALEM.....	T	Mathématiques générales.
EPHRESSI.....	T	Génétique.	LELONG.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.
RIVIÈRE.....	T	Géologie S. P. C. N. et sédim.	DEVILLERS.....	T	Anatomie et Histologie comparée.
GAUTHIER.....	T	Biologie Végétale (P. C. B.).	EHRESMANN.....	T	Topologie Algébrique.
LUCAS R.....	T	Recherches Physiques.	FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
THOMAS A.....	T	Biologie cellulaire.	GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
MORAND.....	T	Physique Enseignement.	PISOT.....	T	Technique Mathématique de la Physique.
SOLELLET.....	T	Physique (P. C. B.).	ROCH.....	T	Géologie.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	SCHATZMAN.....	T	Astrophysique.
DANJON.....	T	Astronomie.	TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
GALLIEN.....	T	Embryologie.	RIZET.....	T	Génétique.
EICHHORN.....	T	Botanique	ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	M ^{me} TONNELAT.....	T	Physique théorique.
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie Physique.	DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
THELLIER.....	T	Physique du Globe.	SOUGHAY.....	T	Chimie générale.
L'HÉRIETIER.....	T	Biologie Générale (Orsay).	AIGRAIN.....	T	Electrotechnique générale.
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).	BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
PONCIN.....	T	Mécanique Générale.	M. LÉVY.....	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des Nombres.	M ^{me} CHAIX.....	T	Chimie biologique.
QUELET.....	T	Chimie Organique.	M ^{me} HUREL-PY.....	T	Biologie Végétale (P. C. B.).
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.	PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.	BRUN.....	T	Mécanique théorique des fluides.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.	LEDERER.....	T	Chimie biologique.
JUNG.....	T	Pétrographie.	M ^{me} DUBREIL.....	T	Mathématique (Agrégation).
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.	M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
WIEMANN.....	T	Chimie Organique et structurale.	BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).	COTTE.....	T	Physique électricité.
VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.	DUBOIS J. E.....	T	Chimie organique.
DESTOUCHES.....	T	Théories Physiques.	LAMOTTE.....	T	Zoologie (E. N. S.).
AMEL.....	T	Chimie générale.	MICHEL A.....	T	Chimie Minérale (Orsay).
HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	OLMER.....	T	Énergetique générale.
J. P. MATHIEU.....	T	Physique Optique.	ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).	GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
MAY.....	T	Zoologie (Orsay).	BARCHEWITZ.....	T	Chimie Physique.
CHEQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.	BRUSSEL.....	T	Physique atomique.
			BUSER.....	T	Physiologie comparée.

CAMUS.....	T	Physiologie Végétale B. M. P. V..	HELLER.....	T	Physiologie végétale.
CASTAING.....	T	Physique II Thermod. (Orsay).	TORTIAT.....	T	Calcul des Probabilités.
CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	CAILLEUX.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
MOYSE.....	T	Physiologie Végétale (Orsay).	MAGNAN.....	T	Physique (S. P. C. N.).
NOIROT.....	T	Évolution des Êtres Organisés.	DAUDEL.....	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
PANNETIER.....	T	Chimie générale.			Biologie Végétale (S. P. C. N.).
POSSOMPES.....	T	Zoologie.	M ^{lle} FOURCROY.....		
PULLMANN.....	T	Chimie quantique.	M ^{me} CHOQUET.....		
TEILLAC.....	T	Physique Nucléaire et Radio-activité.	BRUHAT.....	T	Mécanique Analytique et Mécanique céleste.
TONNELAT.....	T	Biologie Physico-chimique.			Physiologie Générale.
VILLE.....	T	Économétrie.	M ^{lle} VIEL.....	T	Microbiologie.
WILLEMART.....	T	Chimie (P. C. B.).	LWOFF.....	T	Mécanique Physique et Expérimentale.
DODE.....	T	Chimie (Orsay).	SIESTRUNCK.....	T	Métallurgie des métaux Nucléaires.
FREYMANN.....	T	Recherches Physiques.	LACOMBE.....	T	Physique P. C. B. (Orsay).
GUINOCHET.....	T	Biologie vég. S. P. C. N. (Orsay).	BROCHARD.....	T	Mécanique générale.
ROLLET.....	T	Chimie minérale.	CABANNES.....	T	Mathématiques I (Orsay).
M ^{lle} JOSIEN.....	T	Chimie S. P. C. N.	MAZET.....	T	Mécanique générale (Orsay).
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	CAIRE.....	T	Géographie physique et Géologie Dynamique.
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).			Mécanique des Fluides.
CHAPELLE.....	T	Physique (Orsay).	COMOLET.....	T	Physiologie Animale (Orsay).
DELANGE.....	T	Mathématiques (Orsay).	CORABOEUF.....		Physique de l'exosphère.
DENY.....	T	Mathématiques Générales Orsay.	DELLOUE.....		Biologie II (Orsay).
GERMAIN.....	T	Mécanique théorique des fluides.	GORENFLOT.....		Biologie Animale P. C. B.
LUCAS G.....	T	Géologie.	HOULLON.....		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
ALLARD.....	T	Chimie Physique.	JULLIEN J.....		Technique Mathématique de la Physique. (Orsay).
BERTHELOT.....	T	Physique des particules fondamentales.	MALGRANGE.....		Antropologie.
BRICART.....	T	Météorologie et physique de l'Atmosphère.			Botanique II (Orsay).
M ^{me} ALBE-FESSARD.....	T	Psychophysiologie.	OLIVIER.....	T	Physique E. N. S. (Orsay).
M ^{lle} QUINTIN.....	T	Physique des Solides (Orsay).	BLANC-LAPIERRE.....	T	Botanique (Orsay).
M. JULIA.....	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.	CHEVAUGEON.....	T	Mathématiques (Orsay).
LENDER.....	T	Biologie Animale (S. P. C. N.) (Orsay).	KAHANE.....	T	Mathématiques E.N.S. Féminines.
MAGAT.....		Physicochimie des radio-éléments.	SAMUEL.....	T	Astronomie (Orsay).
M ^{lle} QUINTIN.....	T	Électrochimie.	KOURGANOFF.....	T	Mécanique Céleste.
MONOD.....	T	Chimie du métabolisme.	THIRY.....		Physique S. P. C. N.
BENOIT.....	T	Physiologie Animale (Orsay).	ABELES.....		Physique P. C. B.
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique.	AMAT.....		Géologie.
CHARLOT.....	T	Chimie analytique.	AUBOIN.....		Physique Nucl. et radioactivité.
LEMÉE.....	T	Physiologie Végétale B.M.P.V. (Orsay).	Mme BENOIT.....		Biologie marine (Villefranche-sur-mer).
			GUEUTAL.....		Mathématiques M. P. C.
GUÉRIN.....	T	Chimie M. P. C. (Orsay).	BOUGIS.....		Géologie historique (Orsay).
CHATELET M.....	T	Chimie (P. C. B.).			Physique M. G. P. (Orsay).
JEAN.....	T	Physique Nucléaire (Orsay).	BRUHAT.....	T	Mathématique Propéd. (Orsay).
MATTLER.....	T	Physique S. P. C. N.	BRUNN.....		Physique théorique (Orsay).
BERGERARD.....	T	Zoologie (Orsay).	CHABBAL.....	T	Géologie S. P. C. N.
BERTHEIN.....	T	Électronique (Orsay).	DEHEUVELS.....		Génétique.
BOUSSIÈRES.....	T	Chimie des Radioéléments (Orsay).	D'ESPAGNAT.....		Biologie végétale P. C. B.
M ^{me} COUTURE.....	T	Thermodynamique et Mécanique Physique.	FURON.....		Physique (C. U. S. Orléans).
			Mme GANS.....	T	Pétrographie.
ELLENBERGER.....	T	Géologie des grandes régions du globe.	GENEVES.....		Biologie générale.
FRANC.....	T	Biologie Animale (P. C. B.).	GULBET.....	T	Analyse numérique.
SCHNELL.....		Botanique tropicale (Orsay).	HUPE.....		Chimie P. C. B.
STOLKOWSKI.....	T	Physiologie générale.	HOLLANDE.....	T	Physique propédeutique.
ACHER.....		Chimie Biologique (Orsay).	LIONS.....		Géologie appliquée.
BAUDOIN.....		Biologie animale P. C. B.	MAITTE.....		Biologie générale.
BEAUMONT.....		Biologie animale S. P. C. N.	MEYER.....	T	Pétrographie.
BLAMONT.....	T	Géophysique Ionosphère.	NICOLAS.....		Mécanique théorique des Fluides.
BOURREAU.....		Botanique.	PANIGEL.....	T	Électronique.
CURIE D.....		Physique (M. G. P.).	RAYIER.....		Chimie P. C. B.
DURAND-DELGA.....	T	Géologie.	ROSEAU.....	T	Électronique.
FRÉON.....	T	Chimie organique (Orsay).	ROUBINE.....		Théories Physiques.
			SILBER.....		
			UEBERSFELD.....		
			YVON.....		

Secrétaire général..... R. POULLAIN.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SOLUTIONS SINGULIÈRES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;

PAR

MARTIN ZERNER (*)

Introduction. — Nous allons nous intéresser à la question suivante : étant donné un opérateur différentiel a , préciser les propriétés géométriques des points singuliers d'une fonction u vérifiant l'équation

$$(1) \quad a.u = 0.$$

Il a fallu attendre la théorie des distributions pour que cette question, qui paraît ancienne, soit posée de façon précise.

a va être un opérateur linéaire et à coefficients (scalaires ou matriciels) indéfiniment différentiables sur un ouvert U d'un espace vectoriel réel X et u sera une distribution définie sur U où elle vérifiera (1) au sens des distributions. *Sg. (u)* désignera l'ensemble des points au voisinage desquels u n'est pas une fonction indéfiniment différentiable.

Ces définitions comportent un cas « classique », celui où u est m fois dérivable sur U si m est l'ordre de a . Mais ce cas n'a pas fait l'objet de publications à ma connaissance, sauf l'article de LE ROUX [9] où il figure de façon très implicite.

Renvoyons au livre d'HADAMARD [4] pour les références aux travaux classiques. On verra qu'il n'y fait pas de différence entre les singularités de la solution de Volterra et de celles qu'il construit. Or la première vérifie en fait l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu,$$

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1963.

où μ est une mesure de densité constante portée par une demi-droite du type temps. Les solutions de Hadamard au contraire, interprétées par la méthode des intégrales de parties finies qu'il a créée à cette occasion, sont des solutions de (1) au sens des distributions (a est ici du second ordre, hyperbolique et à coefficients analytiques).

Pour un opérateur (scalaire) à coefficients indéfiniment différentiables et à coefficients principaux réels sans caractéristique singulière, HÖRMANDER a démontré tout récemment que $Sg. (u)$ ne pouvait pas être strictement convexe dans toutes les directions bicaractéristiques ([6], [7]). Plus précisément : soit R un fermé limité par une hypersurface régulière et contenant $Sg. (u)$, et soit x_0 un point de la frontière de R . Si sur toute bicaractéristique tangente en x_0 à cette frontière, la distance à R est exactement d'ordre 2 par rapport à la distance à x_0 , alors x_0 n'est pas dans $Sg. (u)$ (1).

Dans un énoncé de ce genre, il est impossible de supprimer l'hypothèse de convexité par rapport aux bicaractéristiques : j'ai construit par deux méthodes différentes des solutions u de l'équation des ondes telles que $Sg. (u)$ soit exactement une bicaractéristique (ZERNER [13]). HÖRMANDER [7] a généralisé une de ces constructions aux bicaractéristiques simples de tous les opérateurs à coefficients constants. Nous allons généraliser ici l'autre construction de façon à atteindre le cas des équations à coefficients analytiques, dont la partie principale est réelle ou vérifie une condition appropriée, et celui de certains systèmes sur-déterminés à coefficients constants. Nous préciserons plus loin les hypothèses ainsi que ce qu'il faut entendre par bicaractéristique (en particulier, dans le cas d'une équation à coefficients complexes la condition supplémentaire que nous imposerons assurera l'existence de bicaractéristiques et d'hypersurfaces caractéristiques réelles).

Le contenu de cet article a été résumé en partie dans [14].

I. — Principe de la construction.

Nous noterons χ_σ la distribution de Riemann-Liouville (cf. M. RIESZ [11], chap. 1) définie pour $\sigma > -1$ par les formules

$$\begin{aligned}\chi_\sigma(s) &= \frac{s^\sigma}{\Gamma(\sigma + 1)} & (s > 0), \\ \chi_\sigma(s) &= 0 & (s \leq 0)\end{aligned}$$

et pour les autres valeurs de σ par prolongement analytique.

(1) En particulier si les singularités de u sont sur une courbe différentiable, cette courbe est nécessairement une bicaractéristique. Dans le cas hyperbolique, ce résultat est une conséquence facile de la solution du problème de Cauchy telle qu'elle résulte des travaux d'HADAMARD pour l'ordre 2, de LAX, LERAY et PETROWSKI pour les ordres supérieurs.

I désignera un intervalle réel ouvert. Si σ est un nombre réel, $[\sigma]$ désignera le plus grand entier inférieur à σ .

Nous emploierons constamment la notation abusive $u(x)$ pour la distribution u en la variable x et la notation intégrale pour une distribution ou un noyau (distribution en deux variables) appliquées à une fonction.

Si f est une fonction indéfiniment différentiable sur un ouvert, dont la différentielle f' ne s'annule pas, on sait définir sur cet ouvert la distribution $\chi_\sigma[f(x)]$, par exemple en prenant un système de coordonnées curvilignes dont la première soit f .

Nous entendrons toujours par sous-variété d'un ouvert U une variété indéfiniment différentiable fermée.

Cette première partie sera consacrée à la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — Soient V une sous-variété de U et f une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ dont la différentielle par rapport à x ne s'annule pas et qui possède de plus les deux propriétés suivantes :

(a) si $x \notin V$, $f(x, s)$ et $\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)$ ne s'annulent pas simultanément;

(b) pour tout s , l'hypersurface S_s d'équation

$$f(x, s) = 0$$

passé par V et en tout point de V , toutes les hypersurfaces S_s admettent un hyperplan tangent commun.

Soient aussi v une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ et φ une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans I .

Alors, si l'on pose

$$B_\sigma(v, \varphi) = \int \chi_\sigma[f(x, s)] v(x, s) \varphi(s) ds,$$

(i) $B_\sigma(v, \varphi)$ est indéfiniment différentiable en dehors de V ;

(ii) si $\sigma > 0$ et non entier, elle est $[\sigma]$ fois continûment dérivable sur U ;

(iii) pour $\sigma > 1$, si v ne s'annule pas sur $V \times I$, tout $s \in I$ possède un voisinage I' tel que si φ est positive, non identiquement nulle et de support contenu dans I' , $B_\sigma(v, \varphi)$ n'est $[\sigma] + 1$ fois continûment dérivable au voisinage d'aucun point de V .

La régularité de $B_\sigma(v, \varphi)$ en dehors de V va résulter de quelques éléments de la théorie de la régularité des distributions par rapport à certaines variables que nous allons d'abord rappeler (SCHWARTZ [12], GÅRDING [2]).

Soient W un ouvert de $\mathbf{R}'$ et $(y_1, \dots, y_k)$ k fonctions définies sur W dont la matrice jacobienne soit de rang k en chaque point [c'est dire

qu'il existe au voisinage de chaque point des fonctions $y_{k+1}, \dots, y_l$ telles que $(y_1, \dots, y_l)$ soit un système de coordonnées locales].

Nous dirons qu'une distribution ψ définie sur W est *transrégulière* en $(y_1, \dots, y_k)$ si, pour tout ouvert W_0 relativement compact dans W , il existe un nombre n tel que, pour tout système de champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p$ tangents aux variétés $(y_1, \dots, y_k) = \text{Cte}$, la dérivée $X_1, \dots, X_p \psi$ soit d'ordre n au plus sur W_0 ⁽²⁾. [Cette définition a été introduite, sous une forme équivalente, par GÅRDING dans une conférence au Collège de France exposant le contenu de son article [2]. Elle a l'avantage de mettre en évidence les changements de coordonnées locales respectant la propriété ainsi définie. Elle équivaut à la notion de distribution intégralement semi-régulière en $(y_{k+1}, \dots, y_l)$ dans l'article de SCHWARTZ [12] où se trouvent démontrés tous les résultats dont nous aurons besoin.]

Nous dirons que ψ est *semi-régulière* en $(y_1, \dots, y_k)$ si, pour toute φ indéfiniment différentiable de support assez petit ⁽³⁾, l'expression

$$\int \psi(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_l) \varphi(y_{k+1}, \dots, y_l) dy_{k+1} \dots dy_l$$

est une fonction indéfiniment différentiable. Cette notion est indépendante du système « complémentaire » $(y_{k+1}, \dots, y_l)$.

Il est clair que $\chi_\sigma(f)$ est transrégulière en f . D'autre part, dans la proposition 1 l'affirmation (i) revient à dire que si l'on appelle W le complémentaire de $V \times I$ dans $U \times I$ et ψ le produit $\chi_\sigma(f) v(x, s)$, la distribution ψ est semi-régulière en x sur W .

Le produit d'une distribution semi-régulière (resp. transrégulière) en $(y_1, \dots, y_k)$ par une fonction indéfiniment différentiable (de toutes les variables) est encore une distribution semi-régulière (resp. transrégulière) en $(y_1, \dots, y_k)$. Ainsi ψ définie ci-dessus est encore transrégulière en f . De plus, pour vérifier qu'une distribution est semi-régulière sur un ouvert, il suffit de vérifier qu'elle l'est sur un voisinage de tout point de cet ouvert.

Enfin dans un système de coordonnées locales $(y_1, \dots, y_l)$ toute distribution transrégulière en $(y_1, \dots, y_k)$ est semi-régulière en $(y_{k+1}, \dots, y_l)$.

⁽²⁾ On sait qu'une distribution est dite d'ordre n au sens des fonctions continues (resp. des mesures) si elle peut s'exprimer comme somme finie de dérivées d'ordre au plus n de fonctions continues (resp. de mesures). L'ordre au sens des fonctions continues d'une distribution est au moins égal à son ordre au sens des mesures et au plus égal à son ordre au sens des mesures augmenté de la dimension de l'espace plus un. On voit que dans la définition de la transrégularité, il est inutile de préciser s'il s'agit de l'ordre dans l'un ou l'autre sens.

⁽³⁾ « φ de support assez petit » signifie ici :

Si K est le support de φ , il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbf{R}^k$ tel que si $(y_1, \dots, y_k) \in \Omega$ et $(y_{k+1}, \dots, y_l) \in K$, le point de coordonnées $(y_1, \dots, y_l)$ est dans W .

Démontrons maintenant que ψ est semi-régulière en x sur W . Au voisinage d'un point où f ne s'annule pas, ψ est une fonction indéfiniment différentiable et *a fortiori* une distribution semi-régulière. Au voisinage d'un point de W , où f s'annule, on peut, grâce à la propriété (a) de f prendre comme coordonnées locales (x, f) . Alors ψ étant transrégulière en f est encore semi-régulière en x .

Si $\sigma > 0$, ψ est une fonction $[\sigma]$ fois continûment dérivable sur $U \times I$, et par suite $B_\sigma(v, \varphi)$ est $[\sigma]$ fois continûment dérivable.

L'affirmation (iii) résultera des lemmes que voici :

LEMME 1. — Soient V une sous-variété de U et f une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ dont la différentielle ne s'annule pas. Supposons vérifiées les hypothèses (a) et (b) de la proposition 1.

Alors pour toute fonction v mesurable et localement bornée sur $U \times I$, toute fonction φ indéfiniment dérivable et de support compact dans I , tout $(x_0, s_0) \in V \times I$ et tout $\sigma > 1$, il existe un nombre C tel que

$$B_\sigma(v, \varphi) \leq C \chi_\sigma[f(x, s_0)] + O(|x - x_0|^{\sigma+1}),$$

où B_σ est définie comme dans la proposition 1.

Démonstration. — Nous supposons que $(0, 0) \in V \times I$, et nous nous placerons sur un voisinage de ce point.

Nous pouvons choisir sur un voisinage de O dans U un système de coordonnées tel que

$$x_1 = f(x, 0).$$

En posant

$$g(s) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, s),$$

il vient

$$g(0) = 1$$

et

$$f(x, s) = g(s) x_1 + s f_1(x, s),$$

où f_1 est une fonction indéfiniment différentiable. D'après l'hypothèse (b) les dérivées partielles de f par rapport aux x_j ($j > 1$) s'annulent pour x nul et s quelconque et par suite :

$$f_1(x, s) = O(|x|^2).$$

La formule des accroissements finis donne alors

$$f(x, s) = \chi_\sigma(x_1) [g(s)]^\sigma + O(|s| \cdot |x|^{\sigma+1}).$$

En portant cette relation dans la définition de B_σ , on obtient

$$(I) \quad B_\sigma(v, \varphi) = \chi_\sigma(x_1) \int v(x, s) \varphi(s) [g(s)]^\sigma ds \\ + \int v(x, s) \varphi(s) O(|s| \cdot |x|^{\sigma+1}) ds$$

et de cette relation, le lemme se déduit immédiatement.

LEMME 2. — *Les hypothèses du lemme 1 étant vérifiées, supposons qu'on ait de plus :*

$$v(x, s) = v_0(x) + (s - s_0) v_1(x, s),$$

ou v_0 est continue et strictement positive et v_1 localement bornée. Alors il existe un voisinage I' de s_0 tel que si φ est positive et a son support contenu dans I' , on peut trouver un nombre strictement positif C de façon à vérifier :

$$B_\sigma(v, \varphi) = C \chi_\sigma[f(x, s_0)] + O(|x - x_0|^{\sigma+1})$$

(sauf si φ est identiquement nulle !).

Démonstration. — La première intégrale figurant dans la formule (I) devient

$$v_0(x) \int [g(s)]^\sigma \varphi(s) ds + \int v_1(x, s) [g(s)]^\sigma s \varphi(s) ds$$

et le deuxième terme sera strictement inférieur au premier si le support de φ est assez petit.

Ce lemme achève de démontrer la proposition 1. En gros cette proposition nous permettra, dans certaines circonstances, de construire des solutions usuelles présentant des singularités sur une sous-variété V . Si nous voulons construire des solutions distributions présentant des singularités d'ordre arbitrairement élevé, nous aurons recours à la variante suivante :

PROPOSITION 1'. — *Dans la proposition 1, on peut remplacer les affirmations (ii) et (iii) par les suivantes :*

(ii') pour $\sigma < 0$ et non entier, $B_\sigma(v, \varphi)$ est d'ordre au plus $-\lceil \sigma \rceil$ au sens des fonctions continues ^(*);

(iii') pour $\sigma < -l$ et non entier, si v ne s'annule pas sur $V \times I$, tout $s \in I$ possède un voisinage I' tel que si φ est positive et de support contenu dans I' , $B_\sigma(v, \varphi)$ est d'ordre au moins $-\lceil \sigma \rceil - l$ au sens des mesures ^(*) (l désigne la dimension de X).

Démonstration. — (ii') se démontre comme (ii).

Pour démontrer (iii') supposons de nouveau que $(0, 0) \in V \times I$. On peut alors trouver un voisinage I' de 0 sur la droite, un nombre

(*) Cf. note (*).

strictement positif C et, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, un point de U , $x_\varepsilon = (x_{\varepsilon 1}, \dots, x_{\varepsilon l})$ vérifiant

$$|x_\varepsilon| \leq C\varepsilon$$

de façon que les relations

$$s \in I' \quad \text{et} \quad |x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$$

entraînent

$$f(x, s) > 0.$$

Soit p l'ordre au sens des mesures de $B_\sigma(v, \varphi)$ et soit α une fonction d'une variable, indéfiniment dérivable, positive, de support contenu dans $[-1, +1]$ et vérifiant $\alpha(0) > 0$. Posons

$$z_\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^l z\left(\frac{x_j - x_{\varepsilon j}}{\varepsilon}\right).$$

Il existe une constante C' telle que

$$\int \chi_\sigma[f(x, s)] v(x, s) \varphi(s) \alpha_\varepsilon(x) ds dx \leq C' \varepsilon^{-p}$$

(le second membre résulte de la majoration des dérivées de z_ε jusqu'à l'ordre p). L'intégrale qui figure dans cette inégalité est une intégrale de Riemann, d'où une nouvelle constante C'' telle que

$$\varepsilon^{\sigma+l} \leq C'' \varepsilon^{-p},$$

ce qui implique

$$\sigma + l + p \geq 0,$$

C. Q. F. D.

II. — Éléments de Géométrie caractéristique.

L'étude faite dans cette partie et dans III a un caractère purement local. Certaines des affirmations qui y seront faites pourront n'être valables que sur un certain voisinage d'un point sans que nous le rappelions chaque fois.

Nous supposons que a est un opérateur linéaire à coefficients scalaires analytiques, nous noterons m son ordre et g sa partie d'ordre m dont nous supposerons d'abord les coefficients réels. g ne peut s'annuler que sur un ensemble analytique, nous supposerons cet ensemble vide.

On sait qu'une hypersurface est dite *caractéristique* si elle est définie au voisinage de chacun de ses points par une équation $f = 0$, où

$$g[x, f'(x)] = 0$$

quand x est sur l'hypersurface et qu'elle est dite caractéristique *simple* si de plus :

$$g'_{\xi} [x, f'(x)] \neq 0,$$

g'_{ξ} désignant la différentielle de g où l'on a fixé x .

Dans le produit de U par le dual X^* de X , nous noterons K l'ensemble des points (x, ξ) vérifiant

$$g(x, \xi) = 0, \quad g'_{\xi}(x, \xi) \neq 0.$$

S'il existe une hypersurface caractéristique simple, K n'est pas vide et c'est alors une sous-variété de dimension $2l - 1$.

Nous poserons

$$\Lambda(\xi, x) = (x, -\xi) \quad (\xi \in X^*, x \in X).$$

L'opérateur Λ permet de faire correspondre à une forme linéaire sur $U \times X^*$ un champ de vecteurs tangents à $U \times X^*$. Nous définirons un champ de vecteurs B tangents à K en posant en chaque point de K :

$$B = \Lambda g' = (g'_{\xi}, -g'_x).$$

C'est un champ de vecteurs caractéristique de l'équation de Pfaff sur K :

$$\xi, dx \rangle = 0.$$

On appellera *bande bicaractéristique* une trajectoire de B et *bicaractéristique simple* la projection sur U d'une bande bicaractéristique ($\cdot$).

Nous dirons qu'une sous-variété $\bar{W}$ de K est *transverse* si elle possède les deux propriétés suivantes :

(a) la projection $(x, \xi) \rightarrow x$ de $\bar{W}$ dans U a un rang égal à la dimension de $\bar{W}$;

(⁵) Donnons une définition plus intrinsèque de ces notions.

U étant une variété différentiable, nous noterons U^* le fibré des formes linéaires tangentes à U , T_x^* sa fibre au-dessus de x , ϖ la projection de U^* sur U . L'application $\varpi_{(x, \xi)}^*$ tangente à ϖ applique $T_{(x, \xi)}^*$ sur T_x^* .

On reconnaît en g'_{ξ} la différentielle de la restriction de g à T_x^* . Sa valeur en (x, ξ) s'identifie à un élément de T_x^* .

On définit une forme différentielle ξdx sur U^* par

$$\langle \xi dx, X \rangle = \langle \xi, \varpi_{(x, \xi)}^* X \rangle.$$

La forme $d(\xi dx)$ définit en chaque point une application Λ' de $T_{(x, \xi)}$ dans $T_{(x, \xi)}^*$. On peut vérifier que Λ' est inversible et l'on définit alors Λ comme l'inverse de Λ' . Du fait que Λ est antisymétrique :

$$\langle g', \Lambda g' \rangle = 0,$$

ce qui exprime que B est tangent à K .

(b) le vecteur g'_z n'est pas tangent à la projection W de $\bar{W}$ sur U .

Une sous-variété V de U sera appelée une *caractéristique au sens de Lie* s'il existe des sous-variétés $\bar{V}$ et $\bar{W}$ de K , $\bar{W}$ transverse, $\bar{V}$ engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\bar{W}$ telle que V soit la projection de $\bar{V}$ sur U . Nous dirons que V est engendrée par $\bar{W}$. On voit qu'il y a identité entre les caractéristiques au sens de Lie de dimension 1 (engendrées par un point) et les bicaractéristiques simples; d'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, il y a aussi identité entre les caractéristiques de Lie de dimension $l-1$ et les hypersurfaces caractéristiques simples.

LEMME 1. — Soit f une fonction analytique telle que l'équation

$$f(x) = 0$$

définisse une hypersurface caractéristique simple. Au voisinage de chaque point de cette hypersurface, on peut trouver un système de coordonnées locales analytiques dans lequel :

(a) $x_1 = f$;

(b) le vecteur $g'_z [x, f'(x)]$ est tangent aux courbes

$$x_1 = 0 \quad (x_2, \dots, x_l) = \text{Cte}$$

qui sont des bicaractéristiques simples;

$$(c) \quad a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = g_1(x) \left[\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} + a_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] [g_2(x) u(x)];$$

où a_1 est d'ordre au plus $m-2$ en x_1 et g_1 et g_2 sont des fonctions analytiques qui ne s'annulent pas.

Démonstration. — En faisant choix d'un système de coordonnées caractéristiques régulières (LERAY [8], chap. 2, n° 4) on assure toutes les affirmations du lemme, à cela près que a_1 peut encore contenir un terme en $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}$ (mais sans autre dérivation).

Un tel terme s'élimine grâce au choix de g_2 .

LEMME 2. — Soit

$$z \rightarrow (y(z), \eta(z))$$

une application différentiable de $\mathbf{R}^k$ dans K . Supposons que

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial z_j}, \eta(z) \right\rangle \neq 0.$$

et appelons $(x(z, t), \xi(z, t))$ la solution du système différentiel

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(x, \xi) = B$$

qui vaut (y, η) pour $t = 0$. Alors

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial z_j}, \xi \right\rangle \neq 0.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer plus : l'expression

$$h(z, t) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial z_j}, \xi \right\rangle$$

est indépendante de t .

En effet $\frac{\partial x}{\partial z_j}$ vérifie le système aux variations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial z_j} \right) = \sum_{n=1}^l \left[\frac{\partial g'_\xi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial z_j} + \frac{\partial g'_\xi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial z_j} \right],$$

en sorte que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = m \left\langle g'_x, \frac{\partial x}{\partial z_j} \right\rangle + (m-1) \left\langle g'_\xi, \frac{\partial \xi}{\partial z_j} \right\rangle - \left\langle g'_x, \frac{\partial x}{\partial z_j} \right\rangle = (m-1) \frac{\partial g}{\partial z_j},$$

quantité qui est nulle puisque nous restons sur K .

[Comme on peut voir, la démonstration revient à s'assurer que la forme $\langle \xi, dx \rangle$ est un invariant du système (1) sur K].

REMARQUE 1. — Tout ce qui précède reste vrai lorsque les coefficients de g sont complexes à condition de remplacer toutes les variétés qui interviennent, à commencer par U , par des variétés analytiques complexes. Nous allons maintenant introduire une condition qui entraîne dans ce cas l'existence d'« assez » d'hypersurfaces caractéristiques dont la partie réelle soit une hypersurface (assez pour appliquer la proposition 1).

Coefficients complexes. — Nous posons maintenant

$$g = g_R + i g_I,$$

où g_R et g_I sont des opérateurs homogènes d'ordre m à coefficients réels, le premier supposé non nul. Il leur correspond comme ci-dessus des sous-variétés K_R et K_I de $U \times X^*$ et les champs de vecteurs tangents respectivement à K_R et K_I :

$$B_R = \Lambda g'_R, \quad B_I = \Lambda g'_I.$$

Toutefois, si g_I est identiquement nul, nous entendrons par K_I l'ouvert $U \times K^*$ tout entier.

Soit A une bande bicaractéristique de g_R qui ait un point dans K_I . Pour que A soit tout entière contenue dans K_I , il faut et il suffit que, sur A :

$$C(x, \xi) = \langle B_R, g_I \rangle = 0.$$

(La première égalité est à considérer comme la définition de C .)

Or, il vient

$$C = -\langle B_I, g_R \rangle = \langle g_R, \xi, g_I, x \rangle - \langle g_R, x, g_I, \xi \rangle$$

de sorte que la condition :

(C) C s'annule en tout point $(x, \xi) \in K_R \cap K_I$;

est nécessaire et suffisante pour que $K_R \cap K_I$ soit engendré à la fois par des bandes bicaractéristiques de g_R et par des bandes bicaractéristiques de g_I ⁽⁶⁾.

Un calcul direct montre que $C\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est la partie d'ordre $2m-1$ du commutant

$$[g_R, g_I] = (i/2) [g, \bar{g}].$$

On voit donc que (C) est une condition nécessaire pour que l'équation $a.u = f$ possède une solution quelle que soit f indéfiniment différentiable (HÖRMANDER [5], [7]).

Nous supposons désormais que g vérifie (C).

Appelons K l'ensemble des points de $K_R \cap K_I$ où les vecteurs g_R, ξ , et g_I, ξ sont linéairement indépendants. Si K n'est pas vide, c'est une variété de dimension $2l-2$.

On peut définir sur K deux fonctions α, β telles que

$$C' = \alpha g_R' + \beta g_I',$$

ce qui entraîne

$$B_C = \Lambda C' = \alpha B_R + \beta B_I$$

⁽⁶⁾ La relation

$$\langle g_I', \Lambda g_R' \rangle + \langle g_R', \Lambda g_I' \rangle = 0$$

exprime tout simplement que Λ est antisymétrique.

On reconnaît en C la parenthèse de Poisson de g_R et g_I (cf. Elie CARTAN [1], chap. XII, n° 123). Elle donne à l'ensemble des fonctions différentiables sur U^* une structure d'algèbre de Lie. La relation

$$B_C = [B_R, B_I]$$

exprime alors que l'application $g \rightarrow \Lambda g'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

(la première égalité est à considérer comme la définition de B_C). Or un calcul direct donne

$$[B_R, B_I] = B_C,$$

de sorte que B_R et B_I engendrent sur K un module de champs de vecteurs complètement intégrable.

Nous appellerons *bande bicaractéristique* une variété intégrale à deux dimensions de ce module de champs de vecteurs. Une bande bicaractéristique est donc engendrée par l'ensemble des bandes bicaractéristiques de g_R qui s'appuient sur une bande bicaractéristique donnée de g_I . La projection sur U d'une bande bicaractéristique sera appelée une *bicaractéristique bien simple* ⁽¹⁾.

Nous dirons qu'une sous-variété $\bar{W}$ de K est *transverse* si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (a) la projection de $\bar{W}$ dans U a un rang égal à la dimension de W ;
- (b) aucune combinaison linéaire non nulle de $g'_{R,\xi}$ et $g'_{I,\xi}$ n'est tangente à la projection W de $\bar{W}$ sur U .

Une sous-variété V de U sera appelée une *caractéristique au sens de Lie* s'il existe des variétés $\bar{V}$ et $\bar{W}$ de K , $\bar{W}$ transverse, $\bar{V}$ engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur W telle que V soit la projection de $\bar{V}$ sur U . Nous dirons encore que V est engendrée par $\bar{W}$.

Il y a maintenant identité entre les bicaractéristiques bien simples et les caractéristiques au sens de Lie de dimension 2. Les caractéristiques aux sens de Lie de dimension $l-1$ sont des hypersurfaces caractéristiques à la fois pour g_R et g_I , c'est-à-dire qu'elles sont la partie réelle d'une hypersurface complexe caractéristique pour g (cf. remarque 1).

III. — Solutions singulières d'une équation.

Tous les opérateurs qui interviendront dans cette partie sont à coefficients scalaires et analytiques.

⁽¹⁾ Dans une première rédaction de cet article on définissait, moyennant quelques complications, une notion de bicaractéristique simple d'une équation à coefficients complexes. Dans le cas d'une équation à coefficients constants, on retrouvait ainsi la définition utilisée dans HÖRMANDER [7] : une bicaractéristique simple est dans ce cas l'ensemble des points $x + \alpha [z g'(\xi)]$, z variant dans $\mathbf{C}$, x fixé dans X , ξ fixé dans X^* et vérifiant $g(\xi) = 0$ et $g'(\xi) \neq 0$. Une telle bicaractéristique est bien simple si elle est de dimension 2 c'est-à-dire si $g'_R(\xi)$ et $g'_I(\xi)$ sont linéairement indépendants. Signalons que dans ce dernier cas on trouve aussi des solutions singulières comme cas particulier de l'étude de la partie IV sur les systèmes à coefficients constants. Par contre le cas g'_I colinéaire à g'_R nous échappe. Pour les coefficients constants il est traité dans HÖRMANDER [7].

b désigne un opérateur à coefficients holomorphes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}'$ et de la forme

$$b = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} - \sum_{k=0}^{m-2} a_{m-k} \frac{\partial^k}{\partial x_1^k},$$

où les a_j sont des opérateurs d'ordre au plus j qui ne contiennent plus de dérivation en x_1 .

Les résultats que nous allons donner maintenant sont classiques ainsi que leur démonstration qu'on trouvera (pour $m=2$) dans HADAMARD [4] (Livre II, chap. 3). Nous la donnons pour être complet et pour disposer de certains des calculs par la suite.

PROPOSITION 1. — *Il existe une unique fonction holomorphe au voisinage de l'origine v vérifiant*

$$b.v = F,$$

$$\frac{\partial^n v}{\partial x_1^n} = n! v_n \quad \text{pour } n = 0, \dots, m-2 \quad \text{et } x_1 = 0,$$

$$v = w \quad \text{pour } x_2 = 0;$$

ou F, v_n, w sont données holomorphes, v_n et w vérifiant les conditions de compatibilité évidentes pour $x_1 = x_2 = 0$.

Démonstration. — En posant

$$v = \sum v_p x_1^p / p!,$$

$$F = \sum F_p x_1^p / p!,$$

$$w = \sum w_p x_1^p / p!,$$

il vient

$$(1) \quad \sum \frac{\partial v_{p+m-1}}{\partial x_2} \frac{x_1^p}{p!} = \sum \left[\sum_{n=0}^{m-2} a_{m-n} v_{p+n} + F_p \right] \frac{x_1^p}{p!},$$

d'où, pour tout $p \geq 0$:

$$(2) \quad v_{p+m-1} = w_{p+m-1} + \int_0^{x_2} F_p(s, x_1, \dots, x_l) ds + \int_0^{x_2} \Phi_{0,p} ds + \int_0^{x_2} \Phi_p ds,$$

où

$$\Phi_{0,p} = \sum_{n=0}^{m-2} a_{m-n}^{(0)} v_{p+n},$$

$a_j^{(0)}$ étant ce que devient a_j quand on y fait $x_1 = 0$. Quant à Φ_p , il ne dépend que des coefficients suivants dans le développement des a_j en série entière de x_1 et des v_k , $k \leq p + m - 1$.

La formule (2) établit déjà l'unicité de la solution du problème aux limites étudié. Elle permet de calculer les coefficients du développement en série de puissances de $x_2, \dots, x_l$ donnant v_p ($p \geq m - 1$) à l'aide d'un polynôme où entrent des coefficients des développements en séries de $v_0, \dots, v_{p-1}$, w , F et des coefficients des opérateurs a_j . Ce polynôme n'a que des coefficients positifs.

Nous allons donc démontrer l'existence en établissant la convergence de la série trouvée pour v par la méthode des séries majorantes (GOURSAT [3], t. II, chap. 19 et 22). Il est bien connu qu'il suffit de faire cette démonstration pour $v_0, \dots, v_{m-2}$, w nuls et F quelconque. Toute série à coefficients positifs sera alors une série majorante pour $v_0, \dots, v_{m-2}$ et w .

Nous remplacerons F et les coefficients des a_j par des séries majorantes en remplaçant l'équation aux dérivées partielles donnée par

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} = \frac{A}{1 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{x_1}{\tau} + x_2 + \dots + x_l \right)} \left[\sum_{n=0}^{m-2} \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \sum_{\substack{x_2 \leq m-n \\ x_1=0}} \frac{\partial^{m-n} f}{\partial x_2} + 1 \right],$$

où A est assez grand, ρ assez petit et $0 < \tau < 1$. A cette nouvelle équation, il s'agit de trouver une solution donnée par un développement en série à coefficients positifs. Pour ce faire, nous poserons

$$f(x_1, \dots, x_l) = g(\varphi, \chi), \\ \varphi = x_1 + \tau x_2, \quad \chi = x_3 + \dots + x_l$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{\partial^m g}{\partial \varphi^m} = \frac{A}{\tau \left[1 - A(\tau + \dots + \tau^{m-1}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\varphi}{\tau} + \chi \right) \right]} (D^+ g + 1),$$

où D^+ est un opérateur à coefficients constants positifs d'ordre total m et d'ordre $m - 1$ en φ . Le coefficient qui figure au second membre est donné par une série à coefficients positifs si l'on a pris τ assez petit pour que

$$A \sum_{n=1}^{m-1} \tau^n < 1.$$

On obtient alors la fonction cherchée en prenant les données de Cauchy de g pour $\varphi = 0$ représentées par des séries à coefficients positifs (on

peut par exemple les prendre nulles) et en appliquant le théorème de Cauchy-Kowalewsky.

PROPOSITION 2. — *Pour tout σ distinct d'un entier $< m$ il existe une fonction holomorphe v qui ne s'annule pas à l'origine et vérifie*

$$b.(x_1^\sigma v) = 0$$

au sens des fonctions analytiques au voisinage de tout point où $x_1 \neq 0$.

Démonstration. — Nous posons encore

$$v = \sum v_p x_1^p / p!,$$

avec $v_p = 0$ pour $p < 0$ et

$$v_\sigma = x_1^\sigma v = \sum v_p x_1^{p+\sigma} / p!,$$

d'où

$$\frac{\partial^k v_\sigma}{\partial x_1^k} = \sum \frac{(p + \sigma + 1) \dots (p + \sigma + k)}{(p + 1) \dots (p + k)} v_{p+k} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!},$$

de sorte que l'équation à vérifier devient

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_p \frac{(p + \sigma + 1) \dots (p + \sigma + m - 1)}{(p + 1) \dots (p + m - 1)} \frac{\partial v_{p+m-1}}{\partial x_2} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!} \\ & = \sum_{p'} \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(p + \sigma + 1) \dots (p + \sigma + n)}{(p + 1) \dots (p + n)} a_{m-n} v_{p+n} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!}. \end{aligned}$$

Cette formule permet de déterminer par récurrence les coefficients v_p par un calcul exactement semblable à celui qui faisait passer de (1) à (2). Pour établir la convergence de la série trouvée, remarquons que (3) ne diffère de (1) que par la présence de coefficients numériques qui tendent vers 1 quand p tend vers l'infini. Du fait que ces coefficients sont majorés et minorés et de la convergence pour tous $v_0, \dots, v_{m-2}, w$ de la série donnée par (2), la convergente suit.

On peut se donner arbitrairement la valeur de v pour $x_2 = 0$ de sorte que la proposition est établie.

COROLLAIRE. — *Soit f une fonction analytique réelle vérifiant $g'_2(x, f') \neq 0$ et telle que l'hypersurface S d'équation $f(x) = 0$ soit caractéristique pour l'opérateur a . Pour tout σ différent d'un entier $< m$ et tout $x_0 \in S$, il existe une fonction v analytique sur un voisinage de x_0 où elle vérifie*

$$a.[v\chi_\sigma(f)] = 0$$

au sens des distributions.

Démonstration. — a et f s'étendent à un ouvert du complexifié de X . Le lemme II.1 permet alors d'appliquer la proposition 2. La (restriction au réel de la) fonction v obtenue vérifie l'équation annoncée puisque les $\chi_\sigma(x_i)$ et les $x_i^\sigma/\Gamma(\sigma+1)$ vérifient les mêmes relations de dérivation et de multiplication par x_i tant qu'il ne figure dans ces relations ni indice ni exposant qui soit un entier négatif.

REMARQUE 1. — En raisonnant comme dans MALGRANGE [10] on peut déduire de ce résultat une condition nécessaire de a -convexité lorsque a est un opérateur à coefficients analytiques vérifiant la condition (C).

THÉORÈME 1. — Soit a un opérateur à coefficients analytiques. Supposons les coefficients de g réels et soit V une caractéristique au sens de Lie simple et analytique. Tout $x_0 \in V$ possède un voisinage W sur lequel est définie une distribution u qui vérifie

$$a.u = 0 \quad \text{et} \quad Sg.(u) = V \cap W.$$

Démonstration. — Si V est une hypersurface, le corollaire de la proposition 2 est une version plus précise du théorème.

Sinon, soit $\bar{W}$ une sous-variété transverse de K qui engendre V , soit $\bar{V}$ la variété engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\bar{W}$ et soit (x, ξ) le point de $\bar{V}$ dont $x \in V$ est la projection. Soit H une hypersurface analytique réelle passant par x_0 telle qu'en aucun point de $H \cap V$ le vecteur $g'_\xi(x, \xi)$ ne soit tangent à H .

Nous pouvons construire une famille $\{T_s\}_{s \in I}$ de sous-variétés analytiques à $l-2$ dimensions de H passant toutes par l'intersection de V avec un voisinage de x_0 dans H et telles que

$$T = \{(x, s); x \in T_s\}$$

soit une sous-variété analytique de $H \times I$ qui n'est tangente à aucune droite $x = \text{Cte}$, du moins sur un certain voisinage de x_0 .

Le théorème des fonctions implicites permet de définir sur un ouvert de T contenant $\{x_0\} \times I$ une fonction analytique η à valeurs dans X^* telle que pour tout $y \in T_s$, l'hyperplan d'équation

$$\langle \eta(y), x - y \rangle = 0$$

soit tangent à T_s , que

$$g[y, \eta(y)] = 0$$

et que

$$\eta(x_0) = \xi_0.$$

Posons

$$\bar{T}_s = \{(x, \xi); x \in T_s, \xi = \eta(x)\},$$

$\overline{T}_s$ est une sous-variété transverse de K d'après sa construction et le choix de H . Désignons par $\overline{S}_s$ la variété engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur T_s et par S_s la projection de $\overline{S}_s$ sur U . Posons encore :

$$S = \{ (x, s); x \in S_s \}.$$

Au voisinage d'un point (x_0, s_0) ($s_0 \in I$), S peut être définie par une équation $f = 0$ où f est analytique et $f' \neq 0$. De plus si nous considérons a comme défini sur $U \times I$ (s n'y figurant pas lorsqu'on l'exprime dans un système de coordonnées compatible avec la structure de produit), S est pour cet opérateur une hypersurface caractéristique simple. Nous pouvons appliquer le corollaire de la proposition 2, obtenant ainsi une solution de la forme $\chi_\sigma(f) v(x, s)$, où v est analytique et $v(x_0, s_0) \neq 0$. La proposition I.1 ou la proposition I.1' (selon la valeur de σ) permet alors de construire des solutions ayant les propriétés annoncées. f vérifie en effet l'hypothèse (a) de ces propositions d'après le lemme II.2 et le choix de T .

REMARQUE 2. — Des précisions sur les singularités obtenues sont données par les propositions I.1 et I.1' et par le lemme I.2.

THÉORÈME 2. — Soit a un opérateur à coefficients analytiques vérifiant la condition (C) et soit V une caractéristique au sens de Lie analytique de a . Tout $x_0 \in V$ possède un voisinage W sur lequel est définie une distribution u qui vérifie

$$a.u = 0 \quad \text{et} \quad Sg.(u) = V \cap W.$$

Démonstration. — Exactement comme celle du théorème 1, à cela près que H doit être prise de dimension $l - 2$ et les T_s de dimension $l - 3$. S_s sera alors de nouveau de dimension $l - 1$, les bandes bicaractéristiques étant de dimension 2.

IV. — Solutions singulières de certains systèmes à coefficients constants.

a désigne maintenant une matrice à q lignes et p colonnes dont les coefficients sont des polynômes. Nous supposons $q > p$. La $j^{\text{ième}}$ ligne de $a(\zeta)$ sera notée $a_j(\zeta)$. Nous appellerons m_j le maximum des degrés des éléments de a_j . g_j sera la matrice ligne dont chaque élément est la partie homogène de degré m_j de l'élément correspondant de a_j . La partie principale g de a sera la matrice dont la $j^{\text{ième}}$ ligne est g_j .

Nous dirons que $\zeta \in X^*$ est un covecteur caractéristique s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que

$$g(\zeta) \cdot \lambda = 0,$$

nous dirons alors que λ est associé à ξ . Nous dirons que le covecteur caractéristique ξ est *simple* s'il existe λ associé à ξ tel que les q vecteurs $g'_j(\xi) \cdot \lambda$ soient linéairement indépendants. Une *hypersurface caractéristique* sera une hypersurface définie localement par une équation $f(x) = 0$ où $f'(x)$ est un covecteur caractéristique en tout point de l'hypersurface. Elle sera dite *simple* si f' l'est. Une *bicaractéristique* sera une sous-variété affine de X de la forme $x + V(\xi, \lambda)$ où ξ est un covecteur caractéristique, λ lui est associé et $V(\xi, \lambda)$ est le sous-espace vectoriel de X engendré par les vecteurs $g'_j(\xi) \cdot \lambda$. Elle sera dite *simple* si elle est de dimension q . Notons que si $V(\xi, \lambda)$ est une bicaractéristique simple, ξ est un covecteur caractéristique simple et si ξ est un covecteur caractéristique simple on peut trouver λ tel que $V(\xi, \lambda)$ soit une bicaractéristique simple.

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soit a un opérateur différentiel matriciel à q lignes et p colonnes ($p < q$) dont les coefficients sont constants. Pour toute bicaractéristique simple V de a , il existe une distribution u définie sur X et vérifiant

$$a \cdot u = 0, \quad Sg. (u) \subset V \quad \text{et} \quad Sg. (u) \neq \emptyset.$$

Réduction au cas $p = 1$. — Nous pouvons supposer que V passe par l'origine. C'est alors le sous-espace vectoriel de X engendré par les vecteurs $g'_j(\xi) \cdot \lambda$ où ξ est un covecteur caractéristique simple et λ lui est associé. Nous construirons des solutions de la forme $u_\lambda = u \cdot \lambda$. En d'autres termes, nous chercherons des distributions scalaires u vérifiant le système d'équations

$$\left[a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \lambda \right] \cdot u = 0,$$

Moyennant le choix d'une base appropriée de X , et au besoin la multiplication de u par une exponentielle, ce système prend la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^{m_j} u}{\partial x_1^{m_j-1} \partial x_j} = \sum_{n=0}^{m_j-2} a_{m_j-n}^j \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n},$$

j parcourant les entiers de 2 à $q + 1$ inclus et les a_k^j étant des opérateurs différentiels en $(x_2, \dots, x_l)$ d'ordre k au plus.

PROPOSITION. — Soit a un opérateur différentiel à coefficients constants portant sur une seule fonction ($p = 1$). Supposons que l'hyperplan S d'équation

$$\langle \xi, x \rangle = x$$

soit caractéristique simple pour a . Il existe alors pour tout σ non entier une fonction analytique v ne s'annulant pas sur S telle que

$$a. [\gamma_\sigma(\langle \xi, x \rangle - x)v] = 0.$$

De plus, si ξ et x sont des fonctions analytiques d'un paramètre z , on peut prendre v analytique en (x, z) .

Démonstration. — Supposons d'abord que l'équation de S a été ramenée à $x_1 = 0$ et a à la forme (1) et posons

$$v = \sum v_k x_1^k / k!$$

Nous allons commencer par calculer les v_k de façon formelle.

La formule (III.3) nous donne ici, en posant

$$k_j = k + 1 - m_j,$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{n=0}^{m_j-2} \frac{(k_j + n + 1) \dots k}{(k_j + n + 1 + \sigma) \dots (k + \sigma)} a_{m_j-n} v_{k_j+n}.$$

Nous appellerons le second membre v_k^j . Nous pouvons toujours prendre $v_0 = 1$.

Supposons calculés $v_1, \dots, v_{k-1}$. Il s'agit alors de savoir si les v_k^j ($j = 2, 3, \dots, q+1$) sont bien les dérivées partielles d'une fonction. Or il vient, en posant

$$k_{jj'} = k + 2 - m_j - m_{j'},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k^j}{\partial x_{j'}} &= \sum_{n=0}^{m_j-2} \frac{(k_j + n + 1) \dots k}{(k_j + n + 1 + \sigma) \dots (k + \sigma)} \\ &\quad \sum_{n'=0}^{m_{j'}-2} \frac{(k_{jj'} + n + n' + 1) \dots (k_j + n)}{(k_{jj'} + n + n' + 1 + \sigma) \dots (k_j + n + \sigma)} a_{m_j-n} a_{m_{j'}-n'} v_{k_{jj'}+n+n'} \\ &= \sum_{n, n'} \frac{(k_{jj'} + n + n' + 1) \dots k}{(k_{jj'} + n + n' + 1 + \sigma) \dots (k + \sigma)} a_{m_j-n} a_{m_{j'}-n'} v_{k_{jj'}+n+n'} = \frac{\partial v_k^j}{\partial x_{j'}}. \end{aligned}$$

La convergence pour tout x de la série obtenue peut se vérifier comme dans la démonstration de la proposition III.2 ou directement en majorant les coefficients par récurrence. Par la même occasion, on vérifie l'analyticité en z , compte tenu de ce qu'en ramenant le système à la forme (1) on obtient des coefficients analytiques en z .

Marche de la construction. — Quelques considérations d'ordre heuristique faciliteront peut-être la lecture de la suite. Au point où nous

en sommes, nous savons construire des solutions avec singularités « en χ_σ » sur un hyperplan caractéristique. Seulement, on ne peut certainement pas appliquer la proposition I.1 en ne disposant que d'hyperplans comme hypersurfaces singulières. Mais considérons une famille d'hyperplans dépendant d'un paramètre z et qui enveloppe une hypersurface S strictement convexe. Soit donnée pour chacun de ces hyperplans une distribution ayant une singularité en χ_σ sur ledit hyperplan et dépendant analytiquement de z . Il est assez intuitif que si l'on intègre cette distribution par rapport à z , on va obtenir une distribution dont les singularités sont concentrées sur l'enveloppe des hyperplans. Nous voulons nous servir de distributions ainsi construites pour appliquer la proposition I.1 mais dans l'exposition nous allons grouper l'intégration en z avec l'intégration en s .

Le système étant sous la forme (1), V a pour équations

$$x_1 = x_{q+2} = \dots = x_l = 0.$$

Posons $q' = l - q$ (si $q \geq l - 1$, la démonstration est toute faite!) et à $z \in \mathbf{R}^{q'}$ faisons d'abord correspondre le point $y \in X$ tel que

$$\begin{aligned} y_1 &= (z_1/2) (z_2^2 + \dots + z_{q'}^2), \\ y_2 &= \dots = y_{q+1} = 0, \\ y_{q+j} &= z_j \quad (j \geq 2). \end{aligned}$$

Il existe alors, d'après le théorème des fonctions implicites, un voisinage W de l'origine dans $\mathbf{R}^{q'}$ où est définie une fonction ξ analytique à valeurs dans X^* ayant les propriétés suivantes :

- (a) pour tout z , ξ est un covecteur caractéristique;
- (b) l'hyperplan $\langle \xi, x - y \rangle = 0$ est tangent au paraboloïde parcouru par y quand $z_1 = \text{Cte}$;
- (c) $\xi(0) = (1, 0, \dots, 0)$.

ξ étant ainsi défini et α valant $\langle \xi, y \rangle$, nous appliquons la proposition ci-dessus, obtenant des solutions de la forme

$$\chi_\sigma(\langle \xi, x - y \rangle) v(x, z) = v_\sigma(x, z).$$

Nous posons enfin :

$$u(x) = \int v_\sigma(x, z) \varphi(z_1) \psi(z_2, \dots, z_{q'}) dz$$

où φ et ψ sont des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts.

Différentiabilité en dehors de V . — Il s'agit de démontrer que $v_\sigma(x, z)$ est semi-régulière en x sur $\bigcup V \times W$. Notons S l'hyperplan d'équation

$\langle \xi, x - y \rangle = 0$. Au voisinage d'un point où $x \notin S$, v_σ est indéfiniment différentiable en (x, z) , plaçons-nous donc en un point où $x \in S$, $x \notin V$ (se rappeler que S dépend de z). D'après la transrégularité en $(\xi, x - y)$, il s'agit de vérifier qu'en un tel point la variété $x = \text{Cte}$ n'est pas tangente à

$$T = \{ (x, z); x \in S \}.$$

Supposons d'abord que

$$x_2 = \dots = x_{q+1} = 0.$$

Dans ce cas, la vérification est bien facile.

Dans le cas général, il s'agit de vérifier qu'on peut trouver une dérivée D en z seulement telle que

$$D \langle \xi, x - y \rangle \neq 0.$$

On peut supposer, quitte à diminuer W , qu'aucun vecteur non nul de la forme

$$\sum_{j=1}^q t_j g'_j(\xi)$$

ne vérifie

$$x_2 = \dots = x_{q+1} = 0.$$

Posons donc

$$x = x' + \sum t_j g'_j(\xi),$$

$$x'_2 = \dots = x'_{q+1} = 0.$$

Il vient d'abord

$$\begin{aligned} \langle \xi, x \rangle &= \langle \xi, x' \rangle + \sum t_j \langle \xi, g'_j(\xi) \rangle \\ &= \langle \xi, x' \rangle. \end{aligned}$$

Puis, en appelant X_j le vecteur de composantes

$$X_{j,k} = \sum_{n=0}^l D \xi_n \frac{\partial^2 g_j}{\partial \xi_k \partial \xi_n},$$

$$Dx' + \sum D t_j g'_j(\xi) + \sum t_j X_j = Dx = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} D \langle \xi, x - y \rangle &= \langle D \xi, x' - y \rangle - \langle \xi, Dy \rangle \\ &\quad - \sum D t_j \langle \xi, g'_j(\xi) \rangle - \sum t_j \langle \xi, X_j \rangle. \end{aligned}$$

Le troisième terme est nul. D'autre part :

$$\langle \zeta, X_j \rangle = (m_j - 1) \langle D\zeta, g'_j(\zeta) \rangle = (m_j - 1) Dg_j = 0.$$

Il reste donc

$$D'\zeta, x - y \rangle = \langle D\zeta, x' - y \rangle - \langle \zeta, Dy \rangle$$

qui n'est autre que la même dérivée calculée en considérant x' comme indépendant de z . Mais alors, si $x' \neq 0$, on a déjà vérifié qu'on pouvait la trouver non nulle, si $x' = 0$ mais $y \neq 0$, c'est tout aussi facile, enfin, si l'on avait $x' = y = 0$ ce serait que $x \in V$.

Existence de points singuliers. — u est une fonction de $(x_2, \dots, x_{q+1})$ à valeurs dans l'espace des distributions en $(x_1, x_{q+2}, \dots, x_l)$. Elle possède en tant que telle une restriction w au sous-espace

$$x_2 = \dots = x_{q+1} = 0.$$

Nous allons montrer que w présente un point singulier à l'origine, ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Posons

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_{q+2}, \dots, x_l), \\ |\bar{x}|^2 &= x_{q+2}^2 + \dots + x_l^2, \\ f(x, z_1) &= (z_1/2) |\bar{x}|^2 - x_1. \end{aligned}$$

Il vient, pour $x_2 = \dots = x_{q+1} = 0$:

$$\langle \zeta, x - y \rangle = f - (z_1/2) |\bar{x} - \bar{y}|^2.$$

On peut alors écrire pourvu que σ soit positif :

$$w(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma + 1)} \int \varphi(z_1) N(x, z_1) dz_1,$$

avec

$$N = \int_{\substack{I \\ |f - \frac{z_1}{2} |\bar{x} - \bar{y}|^2| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}}} [f - (z_1/2) |\bar{x} - \bar{y}|^2]^\sigma \alpha(x, z_1, \bar{y}) d\bar{y},$$

où α est une fonction indéfiniment différentiable nulle quand $\bar{y}$ est en dehors d'un certain compact. Nous restreindrons désormais z_1 à un intervalle ouvert I dont l'adhérence ne contient que des nombres strictement positifs [ce qui a pour effet que le paraboloïde

$$y_1 = (z_1/2) |\bar{y}|^2$$

tourne toujours sa concavité du même côté].

En posant

$$r = \sqrt{\frac{z_1}{2f}} (\bar{y} - \bar{x}),$$

on trouve

$$N = \left(\frac{2}{z_1}\right)^{(l-q-1)/2} f^{\sigma'} \int_{|r| \leq 1} (1 - |r|^2)^{\sigma} \alpha \left(x, z_1, x + r \sqrt{\frac{2f}{z_1}}\right) dr,$$

où

$$\sigma' = \sigma + \frac{l-q-1}{2}.$$

Nous poserons

$$K(x, z_1, t) = \left(\frac{2}{z_1}\right)^{(l-q-1)/2} \int_{|r| \leq 1} (1 - |r|^2)^{\sigma} \alpha(x, z_1, \bar{x} + tr) dr,$$

$$J(x, z_1) = K \left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, z_1)}{z_1}} \right],$$

de sorte que

$$N(x, z_1) = f^{\sigma'} J(x, z_1);$$

la fonction K est indéfiniment différentiable, nous allons essentiellement utiliser le fait qu'elle est lipschitzienne.

Soit $c \in I$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} J(x, z_1) &= J(x, c) \\ &+ K \left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}} \right] - K \left[x, c, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}} \right] \\ &+ K \left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, z_1)}{z_1}} \right] - K \left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}} \right]; \end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} J(x, z_1) &= J_0(x) + (z_1 - c) J_1(x, z_1) \\ &+ \sqrt{f(x, z_1)} J_2(x, z_1) + \sqrt{f(x, c)} J_3(x, z_1), \end{aligned}$$

où les fonctions J_j sont localement bornées et de plus J_0 strictement positive au voisinage de l'origine et continue.

N apparaît ainsi comme la somme de quatre termes. Aux deux premiers nous appliquons le lemme I.2 en faisant jouer à J_0 et J_1 le rôle des fonctions qui s'appelaient v_0 et v_1 dans l'énoncé de ce lemme. Aux deux autres termes nous appliquons le lemme I.1. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Il existe un voisinage I' de c tel que si φ est positive et de support contenu dans I' , il existe $C > 0$ tel que

$$w(x) = C \chi_{\sigma'}[f(x, c)] + O(|x|^{\sigma'+1/2}).$$

Remarque. — La démonstration que nous venons de donner ne fournit que des solutions suffisamment régulières. Comme les coefficients sont constants, nous obtiendrons des singularités d'ordre aussi élevé que nous voudrons en dérivant les solutions ainsi obtenues.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] CARTAN (Élie). — *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris, Hermann, 1922.
- [2] GÅRDING (Lars). — Transformation de Fourier des distributions homogènes, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 381-428.
- [3] GOURSAT (Édouard). — *Cours d'Analyse mathématique*, tome II, 7^e édition. Paris, Gauthier-Villars, 1949 (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris).
- [4] HADAMARD (Jacques). — *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann, 1932 (Leçons professées à l'Université Yale).
- [5] HÖRMANDER (Lars). — Differential equations without solutions, *Math. Annalen*, t. 140, 1960, p. 169-173.
- [6] HÖRMANDER (Lars). — Opérateurs différentiels à caractéristiques non singulières, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Équations aux dérivées partielles* [117, 1962, Paris] (à paraître).
- [7] HÖRMANDER (Lars). — *Linear differential operators* (à paraître).
- [8] LERAY (Jean). — Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy, I), *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 389-429.
- [9] LE ROUX (Jean). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles, 3^e partie, *J. Math. pures et appl.*, 5^e série, t. 4, 1898, p. 402-408.
- [10] MALGRANGE (Bernard). — Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 254, 1962, p. 614-615.
- [11] RIESZ (Marcel). — L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, t. 81, 1948, p. 1-223.
- [12] SCHWARTZ (Laurent). — Distributions semi-régulières et changements de coordonnées, *J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 36, 1957, p. 109-127.
- [13] ZERNER (Martin). — Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 2980-2982.
- [14] ZERNER (Martin). — Sur les singularités des distributions vérifiant une équation aux dérivées partielles à coefficients analytiques, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Équations aux dérivées partielles* [117, 1962, Paris] (à paraître).

(Manuscrit reçu le 5 août 1962, révisé le 21 janvier 1963.)

Martin ZERNER, Faculté des Sciences,
place Victor-Hugo, Marseille, 3 (Bouches-du-Rhône)

THÉORIE DE HARTOGS ET SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS.

PAR

MARTIN ZERNER

(Paris).

INDEX DES NOTATIONS.

G	I, p. 169	E^-	II, p. 170
T	II, p. 169	p_f	II, p. 169
$\mathcal{F}$	II, p. 169	F_i	II, p. 171
λ	II, p. 169	p_F	II, p. 171
E_p	II, p. 169	p	II, p. 171
E^+	II, p. 169	$*R$	II, p. 171
E^-	II, p. 169	p^*	II, p. 172

I. — Fonctions analytiques à valeurs vectorielles.

Pour la démonstration des résultats énoncés sans preuve dans cette section, on pourra se reporter à GROTHENDIECK [7].

Soient E un espace vectoriel complexe localement convexe séparé (ELC), $\hat{E}$ son complété, F une fonction à valeurs dans E . On peut toujours considérer F comme fonction à valeurs dans $\hat{E}$, et il nous suffira donc de définir les fonctions analytiques à valeurs dans un ELC complet; nous dirons ensuite qu'une fonction à valeurs dans un ELC est analytique, si elle est analytique à valeurs dans le complété.

Supposons donc E complet et F définie sur un domaine (ouvert connexe) Δ du plan complexe. Les cinq propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1° Pour tout $z \in \Delta$, le rapport

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

possède une limite quand h tend vers zéro.

2° F est une fois continûment dérivable (au sens réel) et

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

3° F est continue, et pour tout contour Γ rectifiable et homotope à zéro dans Δ ,

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 0.$$

4° Pour $z_0 \in \Delta$ possède un voisinage sur lequel $F(z)$ est somme d'une série

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k.$$

5° Pour toute forme linéaire continue e' sur E , la fonction $\langle e', F \rangle$ est holomorphe sur Δ .

Si F possède ces propriétés, nous dirons qu'elle est *holomorphe à valeurs dans E sur Δ* .

Les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles possèdent les propriétés usuelles des fonctions holomorphes, en particulier :

Formule intégrale de Cauchy :

$$(1/2i\pi) \int_{\Gamma} F(w) dw / (w - z) = F(z).$$

LEMME D'ABEL. — Si la série figurant dans la propriété 4° converge, la suite $\{a_k | z - z_0 |^k\}$ est bornée. Si E est complet, et si la suite $\{a_k r^k\}$ est bornée, alors, pour tout $r' < r$, la série converge uniformément quand $|z - z_0| \leq r'$.

REMARQUE. — On peut remplacer dans ce qui a été dit, « complet » par « quasi complet ».

EXEMPLE 1. — Soit T un espace localement compact. Prenons pour E l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur T muni de la topologie de la convergence compacte. Il y a alors identité entre les fonctions holomorphes à valeurs dans E sur Δ et les fonctions continues sur $\Delta \times T$ qui sont, pour tout $t \in T$ fixé, holomorphes sur Δ .

EXEMPLE 2. — Le cas où E est l'espace $\mathcal{O}'$ des distributions est étudié dans la thèse de C. LONG. Par 5° la donnée de F équivaut alors à la donnée d'une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{O}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'espace des fonctions holomorphes sur Δ (à cause du théorème du graphe fermé). Si $F(z)$ est la solution d'un

problème correctement posé, 4° exprime l'existence d'un développement de perturbation convergent.

Les mêmes remarques restent vraies quand $\mathcal{O}'$ est remplacé par l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées.

Revenons au cas général, et énonçons les résultats que nous aurons à utiliser par la suite.

LEMME 1. — Si F est holomorphe à valeurs dans E sur Δ , alors, pour tout $z \in \Delta$, il existe un voisinage D de z et un espace normé N plongé dans E de façon continue tels que la restriction de F à D soit holomorphe à valeurs dans N .

LEMME 2. — Si E est une limite projective par les applications

$$E \xrightarrow{u_\alpha} E_\alpha$$

une condition nécessaire et suffisante pour que F soit holomorphe à valeurs dans E est que, pour chaque α , $u_\alpha \circ F$ soit holomorphe à valeurs dans E_α .

LEMME 3. — Soient E , E_0 deux ELC, E_0 continûment plongé dans E . Supposons F holomorphe à valeurs dans E sur Δ et de plus telle que l'application

$$\varphi \rightarrow \int F(x + iy) \varphi(x, y) dx dy$$

définisse une distribution à valeurs dans E_0 (c'est-à-dire une application linéaire continue de $\mathcal{O}$ dans E_0). Alors F est holomorphe à valeurs dans E_0 .

DÉMONSTRATION. — Il suffit bien entendu de supposer que $0 \in \Delta$, et de démontrer que F est holomorphe à valeurs dans E_0 au voisinage de l'origine.

Soit α une fonction indéfiniment différentiable d'une variable réelle, vérifiant

$$\int \alpha(t) dt = 1/2\pi$$

et ayant son support dans l'intervalle $[r_0, r_1]$, $0 < r_0 < r_1$, et r_1 assez petit pour que le disque de rayon r_1 centré à l'origine, soit contenu dans Δ .

En multipliant la formule de Cauchy par $\alpha(r)$, et en intégrant en r , on obtient

$$F(x + iy) = \int \frac{F(re^{i\theta}) \alpha(r) re^{i\theta}}{re^{i\theta} - x - iy} dr d\theta$$

Dans cette expression, la quantité à intégrer est le produit de F par une fonction de (x, y) indéfiniment différentiable à valeurs dans $\mathcal{O}$ pour

$x + iy < r_0$. Cela montre que F est une fonction différentiable à valeurs dans E_0 . Mais alors elle satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann (propriété 2° de la définition des fonctions holomorphes), ce qui achève la démonstration.

Cas de plusieurs variables complexes. — Tout ce qui a été dit s'étend sans difficulté. Remarquons que la propriété 5° permet de donner immédiatement la version vectorielle du théorème de Hartogs-Osgood : une fonction séparément holomorphe sur un produit de domaines complexes y est holomorphe.

Fonctions analytiques réelles. — Si F est une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}'$ dans E telle que, pour toute forme $e' \in E'$, la fonction $\langle e', F \rangle$ soit analytique réelle, nous dirons que F est *scalairement analytique réelle*. Nous réserverons le nom d'*analytiques réelles* aux fonctions qui se prolongent en une fonction holomorphe sur un ouvert du complexifié de $\mathbf{R}'$, c'est-à-dire celles qui sont scalairement analytiques réelles et telles que l'intersection des domaines d'holomorphicité des fonctions $\langle e', F \rangle$, quand e' parcourt E' , contienne un ouvert non vide.

Si E est complet, toute fonction scalairement analytique réelle à valeurs dans E est indéfiniment différentiable à valeurs dans E .

LEMME 4. — *Si E' , muni d'une topologie plus fine que celle de la convergence simple, est un espace de Fréchet, toute fonction scalairement analytique réelle, à valeurs dans E , est analytique réelle.*

DÉMONSTRATION. — Soit F scalairement analytique réelle sur U à valeurs dans E . Il suffit de démontrer que tout compact K de U possède un voisinage complexe auquel on puisse étendre F .

Notons, comme il est d'usage, $\mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert V muni de la topologie de la convergence compacte, et $\mathcal{H}(K)$ la limite inductive des $\mathcal{H}(V)$ lorsque V parcourt la famille des voisinages ouverts (complexes) de K .

F définit une application $\tilde{F}$ de E' dans $\mathcal{H}(K)$ par la formule

$$\tilde{F}(e') = \langle e', F \rangle.$$

Si e' tend vers zéro dans E' , $\tilde{F}(e')$ tendra vers zéro en tout point de U . Si alors $\tilde{F}(e')$ a une limite dans $\mathcal{H}(K)$, cette limite ne peut être que nulle. $\tilde{F}$ est donc continue d'après le théorème du graphe fermé. $\mathcal{H}(K)$ étant du type (DF) , il existe un voisinage de l'origine W dans E' dont l'image par $\tilde{F}$ est un borné de $\mathcal{H}(K)$. En particulier, l'image par $\tilde{F}$ de W est formée de fonctions holomorphes sur un même voisinage de K ce qui achève la démonstration, W étant absorbant.

Valeurs au bord. — Soient dans $\mathbf{R}'$ un ouvert U et l'intersection G d'un cône ouvert et d'un voisinage ouvert de l'origine. Nous dirons qu'une fonction F , holomorphe à valeurs dans E sur $U + iG$, admet une valeur au bord près de U si, pour toute fonction φ appartenant à $\mathcal{O}(U)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans U , l'expression

$$\int \varphi(u) f(u + iv) du$$

possède une limite dans E , quand v tend vers zéro en restant dans G . D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cette limite est alors une distribution à valeurs dans E sur U , que nous appellerons bien entendu la valeur au bord de F .

II. — Généralisation de la théorie de Hartogs.

Nous allons étudier les fonctions holomorphes à valeurs dans des espaces de fonctions continues satisfaisant à certaines conditions de croissance. Le raisonnement essentiel est celui qui conduit, dans le cas de l'espace des suites majorées par une progression géométrique, à ce résultat classique que, si un domaine de Hartogs est un domaine d'holomorphic, le logarithme de son rayon est une fonction sur-harmonique (HARTOGS [9]). Dans la section suivante, nous en donnerons des applications aux fonctions holomorphes à valeurs dans des espaces de distributions.

Conventions et notations. — Dans toute cette section, nous supposerons donnés un espace localement compact dénombrable à l'infini T et une fonction ρ strictement positive, inférieure à 1, continue et tendant vers zéro à l'infini sur T .

Nous poserons

$$\lambda = -\text{Log } \rho.$$

E_ρ désignera l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes sur T telles que leur produit par ρ^n tende vers zéro à l'infini. E^+ sera l'espace des fonctions à croissance lente, réunion des E_ρ munie de la topologie de limite inductive. De même, E^- sera l'espace des fonctions à décroissance rapide, intersection des E_ρ munie de la topologie de limite projective.

E^- est donc un espace de Fréchet et E^+ un espace du type (DF) (GROTHENDIECK [6], th. 9).

Si $f \in E^{2+}$ nous poserons

$$p_f = \inf \{ p; f \in E_p \} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [(1/\lambda) \text{Log} |f(t)|]$$

et nous appellerons p_f l'ordre de f .

Le dual de E_p' est l'espace E_p' des mesures dont le produit par ρ^{-p} est borné, la norme étant la masse de ce produit. Nous noterons E'^{-} l'intersection des espaces E_p' munie de la topologie de limite projective.

PROPOSITION 1. — *Le dual fort de E^+ est E'^{-} , la dualité étant donnée par la formule*

$$\langle \mu, f \rangle = \int_T f(t) d\mu(t).$$

DÉMONSTRATION. — D'abord le dual E'^{-} est un espace de mesures. En effet les fonctions continues à support compact sont denses dans chaque E_p et par suite aussi dans E^+ . Pour qu'une mesure soit dans E'^{-} , il faut et il suffit qu'elle induise une forme linéaire continue sur chaque E_p , c'est-à-dire précisément qu'elle soit dans E'^{-} .

Montrons que la topologie de E'^{-} est moins fine que celle de E'^{+} . Un système fondamental de voisinages de zéro dans E'^{-} est formé des ensembles

$$V_{p,r} = \left\{ \mu; \int_T \rho^{-p}(t) d|\mu(t)| \leq r \right\}.$$

Mais $V_{p,r}$ est le polaire de

$$A_{p,r} = \left\{ f; f \in E_p, \sup_{t \in T} [\rho^p(t) |f(t)|] \leq 1/r \right\}$$

qui est borné dans E^+ . Donc $V_{p,r}$ est bien un voisinage de l'origine dans E'^{+} .

E'^{-} est un espace de Fréchet par sa définition. E'^{+} en est un aussi comme dual d'un espace du type (DF). La démonstration s'achève donc par le théorème du graphe-fermé.

PROPOSITION 2. — *L'adhérence dans E^+ d'une boule de E_p , est contenue, quel que soit $q > p$, dans la boule de même rayon de E_q . Ces boules forment un système fondamental de bornés de E^+ .*

DÉMONSTRATION. — Avec les notations de la démonstration précédente, les polaires des $V_{p,r}$ forment un système fondamental de bornés de E^+ . Or ce sont justement les bipolaires des boules $A_{p,r}$, c'est-à-dire, celles-ci étant convexes équilibrées, leurs adhérences. La première partie de la proposition entraîne donc la deuxième.

Le bipolaire de $A_{p,r}$ contient toutes les fonctions continues dont le produit par ρ^p est majoré par $1/r$. Pour montrer qu'il n'en contient pas d'autre, il suffit de remarquer que, δ_a désignant la mesure de masse 1 concentrée au point a de T ,

$$r \rho^p(a) \delta_a \in V_{p,r}.$$

COROLLAIRE. — *L'adhérence dans E^+ d'un borné de E^- est encore un borné de E^+ .*

PROPOSITION 3. — *E^- est complet.*

DÉMONSTRATION. — D'après GROTHENDIECK [6] (corollaire 2, de la proposition 5, p. 77), il suffit de montrer que les parties bornées et fermées sont complètes.

Soit donc $\{B_j\}_{j \in J} = \Phi$ un filtre de Cauchy sur $\tilde{A}_{p,1}$. Nous allons montrer que, pour tout $q \geq p$, Φ converge dans E_q .

D'abord la topologie de E^+ est plus fine que la convergence compacte, et par suite Φ converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue f . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K de T en dehors duquel $\varphi^{q-p} = \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus il existe $j \in J$, tel que toute $g \in B_j$ vérifie sur K :

$$\varphi^q(t) | g(t) - f(t) | < \varepsilon,$$

inégalité qui est alors vérifiée sur tout T , ce qui est le résultat annoncé.

REMARQUE. — Si les E_p sont des espaces de suites (T dénombrable et muni de la topologie discrète), la condition $\varphi_{t,x} = 0$ entraîne que, pour $q \geq p$, l'injection de E_p dans E_q est compacte, et les résultats que nous venons de donner sont alors bien connus (GELFAND et SHILOV [5], SERASTIAO e SILVA [18]). Dans les autres cas on notera que la condition (H 2) exigée dans ZERNER [21] peut être complètement supprimée.

Fonctions à valeurs dans E^+ . — Soient S un ensemble quelconque et F une application de S dans E^+ .

F définit une fonction à valeurs complexes sur $S \times T$. Nous noterons F_t la fonction à valeurs complexes sur S qui au point s , fait correspondre la valeur au point $t \in T$ de la fonction $F(s) \in E^+$.

Nous appellerons p_F , et, quand aucune ambiguïté ne sera à craindre, p , la fonction qui, à $s \in S$, fera correspondre l'ordre de $F(s)$.

On aura donc

$$p(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\text{Log} |F_t(s)|}{\lambda(t)} = \dots$$

Appelons R la droite réelle complétée par le point $-\infty$.

Supposons maintenant S localement compact et F continue à valeurs dans E^+ . Alors, pour tout $t \in T$, la fonction $\frac{\text{Log} |F_t|}{\lambda(t)}$ est continue à valeurs dans R sur S . En en prenant l'enveloppe supérieure sur le complémentaire d'un compact de T on obtient une fonction semi-continue inférieurement et par conséquent mesurable (pour les mesures de Radon sur S). Comme T est

dénombrable à l'infini; p est la limite d'une suite de telles enveloppes. c'est donc une fonction mesurable.

Cas d'une fonction holomorphe. — Supposons F holomorphe à valeurs dans E^+ . Le lemme 1, 1 et la proposition 2 nous amènent alors à associer à F , outre p , une deuxième fonction p^* définie de la façon suivante :

$p^*(z)$ est la borne inférieure des nombres q tels que z possède un voisinage où F soit holomorphe à valeurs dans E_q .

Il résulte de cette définition que p^* est une fonction semi-continue supérieure qui majore p .

LEMME. — $p^*(z)$ est la borne inférieure des nombres q tels que z possède un voisinage où F soit bornée dans E_q .

DÉMONSTRATION. — Il est clair que p^* n'est pas plus petite que ne l'affirme le lemme. Il suffit donc de démontrer que si F est holomorphe à valeurs dans E^+ et bornée dans E_q sur un ouvert complexe U , elle est holomorphe à valeurs dans E_q sur U .

Nous allons utiliser la forme 5° de la définition des fonctions holomorphes. Soit $\mu \in E'_q$. Il existe une suite de mesures $\mu_n \in E'^+$ qui convergent vers μ dans E'_q . Les fonctions $\langle \mu_n, F \rangle$ sont holomorphes sur U et convergent uniformément vers $\langle \mu, F \rangle$ qui est donc holomorphe elle aussi.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 1. — Soit F holomorphe à valeurs dans E^+ sur le disque unité ouvert Δ et continue sur son adhérence. Alors

$$\forall z \in \Delta, \quad p^*(z) \leq \int p(e^{i\theta}) P(z, \theta) d\theta,$$

où P désigne le noyau de Poisson.

De plus l'ensemble de Δ , où $p \neq p^*$, est polaire.

DÉMONSTRATION. — Posons

$$m(z) = \int p(e^{i\theta}) P(z, \theta) d\theta.$$

Cette intégrale a bien un sens. En effet, nous avons vu que p est mesurable. D'autre part, l'image de $\bar{\Delta}$ par F est compacte et, *a fortiori*, bornée dans E^+ ; d'après la proposition 2, il existe donc p_0 tel que cette image soit un borné de E'_{p_0} d'où il suit en particulier que p_0 majore p . Ou bien p est intégrable sur la frontière de Δ , et alors $m(z)$ est finie pour tout $z \in \Delta$, ou bien $m(z)$ vaut $-\infty$ en tout point de Δ . Nous allons commencer par démontrer l'inégalité dans le premier cas.

D'après le lemme, il s'agit de trouver, pour tout $z \in \Delta$ et tout $\varepsilon > 0$, un voisinage U de z tel que l'expression $|\rho(t)|^{m(z) + \varepsilon} F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times T$.

Appelons T' la partie de T où λ est plus grand que 1 (c'est le complémentaire d'un compact) et posons

$$L(z, t) = \frac{\text{Log} |F_t(z)|}{\lambda(t)}.$$

Du fait que $F(z)$ parcourt un borné de E_{p_0} quand z parcourt $\bar{\Delta}$, il existe un nombre M qui majore L sur $\bar{\Delta} \times T'$.

Soient $\{K_n\}$ une suite croissante de compacts qui recouvre T et K'_n le complémentaire de K_n . Nous pouvons supposer K'_n contenu dans T' , et nous poserons

$$L_n(z) = \sup_{t \in K'_n} L(z, t).$$

Lorsqu'on y fixe t , la fonction L devient une fonction sous-harmonique de z et satisfait donc à l'inégalité de Jensen :

$$L(w, t) \leq \int L(e^{i\theta}, t) P(w, \theta) d\theta,$$

d'où, pour tout $t \in K'_n$,

$$L(w, t) \leq \int L_n(e^{i\theta}) P(w, \theta) d\theta.$$

Les fonctions L_n sont semi-continues inférieurement à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc mesurables, elles sont majorées par M , et elles tendent en décroissant vers p quand n tend vers l'infini. Les intégrales

$$\int |L_n(e^{i\theta})| d\theta$$

sont donc toutes majorées par un même nombre M_1 .

Soit $z \in \Delta$. On peut trouver un voisinage U de z , tel que, pour tout $w \in U$ et tout θ ,

$$2M_1 |P(w, \theta) - P(z, \theta)| \leq \varepsilon$$

et par suite, pour tout $w \in U$ et tout $t \in K'_n$,

$$L(w, t) \leq \varepsilon/2 + \int L_n(e^{i\theta}) P(z, \theta) d\theta.$$

A l'intégrale figurant dans cette inégalité, nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue : il existe n_0 tel que, pour $w \in U$ et $t \in K'_{n_0}$,

$$L(w, t) \leq m(z) + \varepsilon,$$

ce qui devient, en multipliant par $\lambda(t)$ et en passant aux exponentielles :

$$|F_t(w)| \leq [\lambda(t)]^{-(m(z) + \varepsilon)}.$$

Comme $F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times K_n$, l'inégalité à démontrer en résulte.

Lorsque $m(z)$ vaut identiquement $-\infty$, l'inégalité à démontrer signifie que pour tout nombre réel q , pour tout $z \in \Delta$, on peut trouver un voisinage U de z tel que l'expression $[p(t)]^q F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times T$.

La démonstration se fait comme dans le premier cas. La différence la plus notable est le choix de U : on le prendra tel que, pour $w \in U$, ait lieu une inégalité :

$$(1 - \varepsilon) P(z, \theta) \leq P(w, \theta) \leq (1 + \varepsilon) P(z, \theta).$$

D'autre part, au lieu du théorème de Lebesgue, il faudra appliquer un cas particulier du lemme de Fatou : si une suite décroissante majorée de fonctions mesurables tend vers une fonction non sommable, la suite des intégrales tend vers $-\infty$.

La partie du théorème que nous venons de démontrer entraîne que si p^* ne vaut pas identiquement $-\infty$, c'est une fonction sous-harmonique, régularisée supérieure de p (c'est-à-dire la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui majore p).

Appelons L_t la fonction de z obtenue en fixant t dans L . Pour tout n , la famille de fonctions sous-harmoniques $(L_t)_{t \in X_n^*}$ est alors bornée supérieurement par M sur Δ . Un théorème de BRELOT ([1], chap. VI, n° 4) et CARTAN ([3]) assure précisément que l'enveloppe supérieure L_n d'une telle famille diffère seulement sur un ensemble polaire d'une fonction sous-harmonique (nécessairement sa régularisée supérieure L_n^*).

Quand n tend vers l'infini, L_n tend en décroissant vers p , la fonction sous-harmonique L_n^* décroît aussi et tend donc vers une fonction sous-harmonique L^* . Soient A_n l'ensemble (polaire) où $L_n \neq L_n^*$ et A la réunion des A_n qui est donc encore un ensemble polaire. On a $p = L^*$ en dehors de A , et par suite L^* n'est autre que la régularisée supérieure de p , c'est-à-dire p^* .

THÉORÈME 2. — Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ des courbes de Jordan du plan complexe, G, Δ_j l'ouvert borné limité par Γ_j , m_z^l la mesure harmonique au point z dans Δ_j , F une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ sur le produit Δ des Δ_j et continue sur l'adhérence de Δ . Alors

$$\forall (z_1, \dots, z_l) \in \Delta,$$

$$p^*(z_1, \dots, z_l) \leq \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_l} p(w_1, \dots, w_l) dm_{z_1}^l(w_1) \dots dm_{z_l}^l(w_l)$$

DEMONSTRATION. — Supposons d'abord que les Δ_j soient tous des disques. La démonstration se fait alors comme dans le cas d'une seule variable : les complications sont purement formelles.

Dans le cas général, soit f_j une fonction qui réalise la représentation conforme de Δ_j sur le disque unité. Il est classique que f_j se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\Delta}_j$ sur le disque fermé (CARATHÉODORY [2], tome II, 6^e partie, chap. III, p. 85 et suivantes). L'image de la mesure harmonique est bien entendu le produit du noyau de Poisson par la mesure invariante $d\theta$. Appelons f l'application produit des f_j : elle représente $\bar{\Delta}$ sur le polydisque unité et ramène ainsi la démonstration à celle du cas déjà traité.

COROLLAIRE 1. — *Soit F holomorphe à valeurs dans E^+ sur le domaine Δ . S'il existe un sous-ensemble non polaire A de Δ dont l'image par F soit contenue dans E^- , alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ .*

COROLLAIRE 2. — *Soit F analytique réelle à valeurs dans E^+ sur un ouvert connexe U . S'il existe un sous-ensemble A de mesure non nulle de U dont l'image par F soit contenue dans E^- , alors F est analytique réelle à valeurs dans E^- .*

DEMONSTRATION. — Soit V un domaine d'analyticité complexe de F . Il existe l intervalles réels I_j dont le produit coupe A selon un ensemble de mesure non nulle, et tels que, Δ_j désignant un demi-disque du plan complexe limité par le diamètre I_j , le produit Δ des Δ_j soit contenu dans V . Le théorème montre alors que F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ , et le corollaire 1 permet d'en déduire qu'elle l'est sur tout V .

REMARQUE 1. — Dans les hypothèses du corollaire 2, on peut remplacer « analytique réelle » par « scalairement analytique réelle » (lemme I, 4).

REMARQUE 2. — Dans le cas d'une seule variable, le corollaire 2 est sans intérêt : le corollaire 1 est plus fort dans ce cas. Dans les autres cas, le corollaire 1 peut être renforcé grâce à un théorème récent de LEBLOND ([12], [13]), nous y reviendrons dans la section IV.

COROLLAIRE 3. — *Soit γ un arc libre dans la frontière du domaine Δ du plan complexe. Si la fonction F est holomorphe à valeurs dans E^+ sur Δ , continue sur $\Delta \cup \gamma$ et si, de plus, l'image de γ est dans E^- , alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ . Si γ est continûment différentiable, la conclusion subsiste si l'on suppose que F applique dans E^- un sous-ensemble de mesure linéaire non nulle de γ .*

DEMONSTRATION. — On appelle arc libre dans la frontière de Δ un arc de Jordan d'extrémités z_1, z_2 tel que, pour tout $z_0 \in \Delta$, existent deux arcs de Jordan γ_1, γ_2 contenus dans Δ sauf une extrémité, et joignant z_0 respectivement à z_1 et à z_2 . Les trois arcs $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ forment une courbe de Jordan à laquelle on applique le théorème : dans tous les cas p y vaut $-\infty$ sur un ensemble de mesure harmonique non nulle. Le corollaire 1 achève la démonstration.

COROLLAIRE 4. — Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ sur $U + iG$ qui admette une valeur au bord près de U . Supposons que cette valeur au bord soit une distribution à valeurs dans E^- , alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur $U + iG$.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 1,3, il suffit de démontrer que F définit sur $U + iG$ une distribution à valeurs dans E^- , ou encore que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U \times G)$, l'expression

$$\int \varphi(u, v) F(u + iv) du dv$$

est dans E^- (le théorème du graphe fermé assurera la continuité). Il suffit même de le démontrer pour toutes les φ de support assez petit : les autres en sont des sommes finies. Enfin il suffit de le faire pour un ouvert non vide $U' \subset U$ (corollaire 1).

Soient K un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^l$ et U' un ouvert tels que $U' - K \subset U$. Notre conclusion résultera du fait que, pour toute α indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^l$ et à support contenu dans K , la fonction F définie par

$$F(u + iv) = \int \alpha(s) F(u - s + iv) ds$$

est holomorphe à valeurs dans E^- . Or elle est holomorphe à valeurs dans E^+ , elle est continue quand v tend vers zéro d'après la définition de la valeur au bord et le fait qu'elle se déduit de F par régularisation. Enfin sur U' elle prend ses valeurs dans E^- . On peut donc lui appliquer le théorème en prenant pour Δ un produit de demi-disques tels que le produit des diamètres qui les limite soit dans U' et Δ dans $U' + iG$ (en changeant de base au besoin, on peut supposer que G contient l'intersection d'une boule avec le produit des demi-axes positifs).

III. — Application aux distributions.

Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact. En appelant $\hat{F}(z)$ la transformée de Fourier de $F(z)$, on peut appliquer à la fonction $\hat{F}$ l'étude de la section précédente, l'espace T étant $\mathbf{R}^l$ et la fonction ρ valant $(1 + |t|^2)^{-1/2}$. Nous allons nous affranchir de la restriction que le support est compact.

Notations pour les espaces de distributions. — Si D est un espace de distributions sur $\mathbf{R}^l$ et A un ensemble fermé de $\mathbf{R}^l$, D_A désignera l'espace des distributions de D dont le support est contenu dans A muni de la topologie induite, $D_*(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^l$, la réunion des D_K quand K parcourt l'ensemble des compacts de U , muni de la topologie de limite

inductive, $D_{\text{loc}}(U)$ l'espace des distributions S sur U telles que, pour tout ouvert V relativement compact dans U , il existe une distribution de D égale à S sur V . Si D est stable pour la multiplication par les fonctions de $\mathcal{O}$, $D_{\text{loc}}(U)$ sera muni de la topologie limite projective par les applications $S \rightarrow \alpha S$ dans D où α parcourt $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_c(U)$. Nous noterons D_c , D_{loc} au lieu de $D_c(\mathbf{R}^l)$, $D_{\text{loc}}(\mathbf{R}^l)$. Avec ces notations et les notations usuelles :

$$\mathcal{S}' = \mathcal{O}'_c = \mathcal{S}'_c, \quad \mathcal{O}' = \mathcal{S}'_{\text{loc}} = \mathcal{S}'_{\text{loc}}, \quad \mathcal{O} = \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c, \quad \dots$$

B-ordre. — Appelons B^p l'espace des distributions S tempérées et ayant une transformée de Fourier $\hat{S}$ continue et dont le produit par $(1 + |t|^2)^{p/2}$ soit borné. Nous appellerons B -ordre sur l'ouvert U d'une distribution S la borne inférieure des nombres q tels que $S \in B_{\text{loc}}^{-q}(U)$.

Rappelons qu'on appelle H^p l'espace des distributions tempérées dont la transformée de Fourier est de carré sommable par rapport à la mesure $(1 + |t|^2)^p dt$, et qu'on appelle ordre au sens de L^2 de S la borne inférieure des nombres q tels que $S \in H_{\text{loc}}^{-q}$.

PROPOSITION 1. — *Soit S une distribution sur $\mathbf{R}^l$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1° Pour toute $\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha S \in B^p$.
- 2° La convolution avec S applique $L_c^2 = H_c^0$ dans H_{loc}^p .
- 3° Pour tout q , la convolution avec S applique H_c^q dans H_{loc}^{q+p} .

COROLLAIRE 1. — *B^p est stable pour la multiplication par les fonctions de $\mathcal{O}$.*

COROLLAIRE 2. — *La différence entre le B -ordre et l'ordre au sens de L^2 n'excède pas $[l/2] + 1$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. — Supposons d'abord S à support compact et rappelons la démonstration dans ce cas (TREVES [19]). D'abord il est clair, à cause de la formule de Parseval, que 1° implique 2° et 3° qui sont équivalentes et impliquent à leur tour $S \in B^p$. Reste à montrer que si $S \in B^p$ et $\alpha \in \mathcal{O}$, alors $\alpha S \in B^p$. Cela revient à dire que $(1 + |t|^2)^{p/2} \hat{\alpha} \star \hat{S}$ est bornée. Or, si $p \geq 0$

$$\begin{aligned} & \left| (1 + |t|^2)^{p/2} \int \hat{\alpha}(r) \hat{S}(t-r) dr \right| \\ & \leq C \int |[(1 + |t-r|^2)(1 + |r|^2)]^{p/2} \hat{\alpha}(r) \hat{S}(t-r)| dr \\ & \leq C \|S\|_{B^p} \int (1 + |r|^2)^{p/2} |\hat{\alpha}(r)| dr. \end{aligned}$$

(Inégalités à modifier légèrement si $p < 0$.)

Passons au cas où le support de S est quelconque. Pour vérifier que $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$, utilisons une partition de l'unité localement finie $\{\alpha_k\}$. Si $f \in H_c^q$,

$$S \star f = \sum (\alpha_k S) \star f$$

et la somme figurant au second membre est localement finie.

La proposition sera complètement établie si nous démontrons que la propriété 3° entraîne que le produit de S par toute fonction indéfiniment différentiable α possède encore la propriété 3° . Compte tenu du fait que le noyau de l'opérateur « convolution avec αS » est le produit du noyau de l'opérateur « convolution avec S » par $\alpha(s-r)$, cela résulte du lemme ci-dessous où l'on fera $\varphi(s, r) = \alpha(s-r)$.

LEMME 1. — Soient U, V deux ouverts de $\mathbf{R}^l$, K un noyau sur $U \times V$ qui définit une application de $H_c^p(U)$ dans $H_{loc}^q(V)$, φ une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times V$. Alors le noyau φK définit encore une application de $H_c^p(U)$ dans $H_{loc}^q(V)$.

DÉMONSTRATION. — Si $\varphi(s, r) = \alpha(s)\beta(r)$ le lemme est évidemment vérifié. De plus l'application qui à (α, β) fait correspondre l'application de noyau $\alpha\beta K$ est séparément continue de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}_b(H_c^p, H_{loc}^q)$. $\mathcal{E}$ étant un espace de Fréchet elle est continue d'après un théorème de Baire. D'après la propriété fondamentale du produit tensoriel projectif elle se prolonge alors de façon unique en une application linéaire continue de $\mathcal{E}(U) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \times V)$ dans $\mathcal{L}_b(H_c^p, H_{loc}^q)$ (GROTHENDIECK [8], chap. I, prop. 2, p. 30, SCHWARTZ [16], exp. 1).

REMARQUE. — Cette démonstration est bien entendu susceptible de nombreuses variantes. (Cf. le résultat utilisé dans le lemme de ma Note [20].)

Fonctions pluri-sous-harmoniques. — Rappelons qu'une fonction u à valeurs dans *R est dite pluri-sous-harmonique sur un ouvert U d'un espace vectoriel complexe de dimension finie V si elle est semi-continue supérieurement sur U et si sa restriction à l'intersection de U avec toute sous-variété affine complexe de dimension complexe un de V est sous-harmonique ou vaut identiquement $-\infty$.

LEMME 2 (LELONG [11]). — Soit u une fonction semi-continue supérieurement à valeurs dans *R sur un ouvert U de l'espace vectoriel complexe à l dimensions V . Supposons que, pour tout $v_0 \in U$, pour toute base $(v_1, \dots, v_l)$ de V et tout ensemble de l nombres > 0 $(r_1, \dots, r_l)$ tel que le polydisque

$$\{v_0 + z_1 v_1 + \dots + z_l v_l : |z_j| \leq r_j\}$$

soit contenu dans U , soit vérifiée l'inégalité

$$u(v_0) \leq \int \dots \int a(v_0 + r_1 e^{i\theta_1} + \dots + r_l e^{i\theta_l}) d\theta_1 \dots d\theta_l.$$

Alors u est pluri-sous-harmonique sur U .

DEMONSTRATION. — v_0 et la base étant arbitraires, il suffit de démontrer que

$$u(v_0) \leq \int u(v_0 + r_1 e^{i\theta}) d\theta.$$

Pour cela, on fait tendre $r_2, \dots, r_l$ vers zéro et l'on tient compte du fait que u , étant semi-continue supérieurement, l'est uniformément sur tout compact.

PROPOSITION 2. — Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{R}^l)$ sur un domaine complexe Δ et soit p_U la fonction qui fait correspondre à $z \in \Delta$ le B -ordre de $F(z)$ sur l'ouvert relativement compact U . Alors p_U est égale en dehors d'un ensemble polaire de Δ à une fonction pluri-sous-harmonique qui la majore sur Δ tout entier. D'autre part, si, sur un ouvert $V \subset \Delta$, p_U est strictement plus petite qu'un nombre p_0 , F définit par restriction une fonction holomorphe à valeurs dans $B_{\text{loc}}^{p_0}(U)$ sur V .

DEMONSTRATION. — Si, pour tout $z \in \Delta$, le support de $F(z)$ est compact dans U , la proposition exprime tout simplement le théorème II,2 complété par le lemme 2. Si $\alpha \in \mathcal{O}(U)$ appelons p_α la fonction qui à z fait correspondre le B -ordre de $\alpha F(z)$. On a dans tous les cas :

$$p_U = \sup_{\alpha \in \mathcal{O}(U)} p_\alpha.$$

La régularisée supérieure $p_U^\bullet$ de p_U est donc pluri-sous-harmonique d'après la variante concernant les fonctions pluri-sous-harmoniques du théorème de convergence de Brelot et Cartan que nous avons utilisé plus haut (LELONG [11]).

D'après le lemme topologique de Choquet (BRELOT [1], chap. I, n° 2) il existe un ensemble dénombrable de fonctions $J \subset \mathcal{O}(U)$ tel que $p_U^\bullet$ soit la régularisée supérieure de $\sup_{\alpha \in J} p_\alpha$. On en conclut que p_U ne diffère de $p_U^\bullet$ que sur un ensemble polaire grâce à une nouvelle application du théorème de convergence.

Enfin la dernière affirmation résulte de la combinaison du théorème II,2 et du lemme I,2.

Distributions tempérées. — Nous voulons aussi appliquer les résultats de la section III aux fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathcal{S}'$. A cet effet, prenons pour T le produit de l exemplaires de l'ensemble des entiers positifs et

posons

$$\varphi(n_1, \dots, n_l) = \frac{1}{1 + n_1 + \dots + n_l}.$$

A toute distribution tempérée, faisons correspondre son développement en fonctions de Hermite (SCHWARTZ [15], tome II, chap. 7, § 7, exemple 7). Nous établissons ainsi un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{S}'$ sur E^- dont la restriction à $\mathcal{S}$ est un isomorphisme sur E^- .

Nous allons énoncer une série de résultats qui s'obtiennent en traduisant les corollaires du théorème II,2 (avec l'aide du lemme 1,2 quand il s'agit de $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{S}$).

PROPOSITION 3. — *Soit F holomorphe à valeurs dans $\mathcal{O}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur le domaine Δ . S'il existe un sous-ensemble A non polaire de Δ dont l'image par F soit contenue dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$) sur Δ .*

PROPOSITION 4. — *Soit F analytique réelle à valeurs dans $\mathcal{O}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur un ouvert connexe U . S'il existe un sous-ensemble A de U de mesure non nulle dont l'image par F soit contenue dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est analytique réelle à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$).*

PROPOSITION 5. — *Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur un ouvert $U + iG$ (p. 169) qui admette une valeur au bord près de U . Supposons que cette valeur au bord soit une distribution à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$) sur $U + iG$. (L'hypothèse sur la valeur au bord s'exprime dans le cas de $\mathcal{E}$ en disant que cette valeur au bord est un noyau semi-régulier à droite.)*

Application à la transformation de Fourier. — Soit V un espace vectoriel réel à l dimensions, soient aussi $\varphi^* \in V^*$ une forme linéaire sur V et S une distribution tempérée sur V dont le support soit contenu dans

$$B = \{ \varphi; a \leq \langle \varphi^*, \varphi \rangle \leq b \} \quad (a \text{ et } b \text{ des nombres réels}).$$

Soit enfin $\hat{U}$ un ouvert de V^* tel que la transformée de Fourier $\hat{S}$ soit indéfiniment différentiable sur U . Alors $\hat{S}$ est encore indéfiniment différentiable sur

$$\hat{U} = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} s\varphi^* + \hat{U}.$$

Un énoncé analogue a lieu si l'on ne suppose plus S tempérée, si B est défini, quand on a fait choix d'une base appropriée, par $a \leq \varphi_1 \leq b$ et si l'on considère la transformée de Fourier partielle en φ_1 .

On peut d'ailleurs remarquer que le premier énoncé se ramène au second par le choix de la base et le fait que la transformée de Fourier peut être prise d'abord en ν_1 , puis en $(\nu_2, \dots, \nu_l)$. Mais par l'hypothèse sur le support, la transformée de Fourier en ν_1 définit une fonction analytique à valeurs dans l'espace des distributions en $(\nu_2, \dots, \nu_l)$ d'où la possibilité d'appliquer les résultats ci-dessus.

Dans ces énoncés, B ne peut être remplacé par un demi-espace. Pour le voir, il suffit de considérer la fonction

$$\varphi(\nu_1, \nu_2) = \psi(\nu_2^m / \nu_1).$$

où ψ est une fonction indéfiniment dérivable dont le support est contenu dans $[0, 1]$ et m un entier positif.

La transformée de Fourier (en ν_1 et ν_2) de φ est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine.

IV. — Contre-exemples divers.

Les différents numéros de cette section sont indépendants entre eux.

1. **Absence d'extension aux E. L. C. généraux.** — Il est naturel de se demander si les résultats obtenus à la section II sont liés à la nature très particulière des espaces étudiés. Pour nous en convaincre nous allons exhiber une suite doublement infinie d'espaces de Banach A_n avec les propriétés suivantes :

- (i) A_n est plongé dans A_{n+1} de façon continue.
- (ii) La réunion A^+ et l'intersection A^- des espaces A_n munies respectivement des topologies de limite inductive et de limite projective sont nucléaires.
- (iii) Il existe des fonctions entières à valeurs dans A^+ qui appliquent un ouvert non vide du plan complexe dans un ensemble borné de A^- sans toutefois prendre toutes leurs valeurs dans A^- .

Le plus simple est de prendre pour A_n l'ensemble des fonctions holomorphes bornées dans le disque de rayon r_n qui tendra vers zéro quand n tendra vers $+\infty$ et vers 1 quand n tendra vers $-\infty$, et de poser

$$[F(z)](\omega) = \frac{1}{1 - z\omega}.$$

2. **Absence de quasi-analyticité forte.** — Appelons E^0 le quotient de E^+ par E^- (sans topologie !) et convenons de dire qu'une fonction à valeurs dans E^0 est holomorphe si elle peut se relever en une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ . Une telle fonction possède une propriété de quasi-analyticité faible. Le résultat de quasi-analyticité forte correspondant serait « si

une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ a toutes ses dérivées en un point dans E^- , alors elle prend toutes ses valeurs dans E^- ». Il est faux d'après le lemme d'Abel. En effet soit $\{f_k\}$ une suite dans E^- . La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k / k!$$

définira une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ pourvu que pour un certain $r > 0$ la suite $\{f_k r^k / k!\}$ soit bornée dans E^- . Si cette fonction prend ses valeurs dans E^- , elle est holomorphe à valeurs dans E^- , d'où il résulte que pour tout $r' < r$ la suite $\{f_k r'^k / k!\}$ est bornée dans E^- ; visiblement, ce n'est pas le cas en général.

3. Ensembles exceptionnels. — Demandons-nous si le corollaire 1 du théorème II, 2 peut être renforcé (par exemple en y remplaçant « non polaire » par « ayant un point d'accumulation à l'intérieur de Δ »). Dans le cas classique qui mène à la théorie de Hartogs (voir le début de la section II) et pour une fonction d'une seule variable, la réponse est connue et négative (CARTAN [4], LELONG [10]). Toujours dans ce cas, on peut trouver une fonction F telle que $p_F \neq p_F^*$ en tout point de l'ensemble A pourvu que A soit contenu dans une réunion dénombrable de compacts polaires (mêmes références). Ces résultats subsistent, toujours pour les fonctions d'une seule variable, dans le cadre plus général où nous nous sommes placés. Les démonstrations ne diffèrent que par des modifications faciles. Nous allons d'ailleurs donner maintenant une autre démonstration de ce type.

PROPOSITION. — *Soient Δ un domaine du plan complexe et A un sous-ensemble de Δ . Pour qu'il existe une fonction F holomorphe à valeurs dans E^+ sur Δ sans être holomorphe à valeurs dans E^- et telle que l'image de A soit un borné de E^- , il est nécessaire que l'adhérence de A dans Δ soit polaire. Si A est polaire et compact, il existe une telle fonction qui de plus n'applique dans E^- que les seuls points de A .*

DÉMONSTRATION. — La condition nécessaire résulte du corollaire de la proposition II, 2.

Pour la condition suffisante, commençons par supposer la proposition démontrée lorsque T est l'ensemble des entiers positifs et ramenons la construction de F à ce cas. Soit donc T localement compact et dénombrable à l'infini et soit $\{t_n\}$ une suite de points distincts tendant vers l'infini dans T . D'après le cas supposé démontré du théorème, il existe une suite de fonctions entières g_n d'une variable complexe et un nombre p tels que la quantité $\{\rho(t_n)\}^p g_n(z)$ reste bornée quand z parcourt A et n les entiers positifs, mais tels aussi que pour tout $z \notin A$, il existe un nombre q tels que la suite $\{\{\rho(t_n)\}^q g_n(z)\}$ ne soit pas bornée. Soit aussi f_n une suite de fonctions continues positives à support compact sur T qui atteignent le maximum 1 au

point t_n . En prenant le support de f_n suffisamment petit, on vérifiera que la fonction

$$\sum f_n g_n$$

possède les propriétés annoncées.

Nous supposons maintenant que $T = N$. La théorie de la capacité nous assure du résultat suivant :

Quels que soient les trois nombres > 0 , ε , δ et k , il existe un voisinage compact K de A dont tous les points ont une distance à A au plus égale à δ , et une mesure positive μ portée par la frontière de K , de masse $\leq \varepsilon$ et telle que sur A :

$$\int \text{Log} |z - w| d\mu(w) \leq -k.$$

Posons $\lambda_n = -\text{Log}[\rho(n)]$. Ce nombre tend vers l'infini avec n . Cela permet d'approcher μ par des sommes finies de masses ponctuelles avec des coefficients de la forme k/λ_n (k , n des entiers positifs) et d'apporter ainsi la précision suivante au résultat cité :

Quels que soient ε , δ , k , il existe m points z_j dont la distance à A n'excède pas δ et un entier n (d'ailleurs aussi grand qu'on veut) tels que

$$m/\lambda_n \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_j \text{Log} |z - z_j| \leq -k\lambda_n \quad \text{sur } A.$$

Pour construire F il suffit maintenant de faire parcourir à k la suite des entiers positifs, à chaque k , on fait correspondre ε_k et δ_k tendant vers zéro en décroissant quand k tend vers l'infini. Par le résultat qu'on vient d'obtenir on fera aussi correspondre à k , ε_k , δ_k deux entiers m_k et n_k et m_k points $z_{j,k}$ et ce de façon que la suite $\{n_k\}$ soit strictement croissante. On définira enfin la fonction F par

$$F_n(z) = 0 \quad \text{si } n \text{ ne fait pas partie de la suite } \{n_k\},$$

$$F_{n_k}(z) = \prod_{j=1}^{m_k} (z - z_{j,k}).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que cette fonction possède toutes les propriétés annoncées.

Cas de plusieurs variables. — On sait qu'il y a dans $\mathbf{C}'$ deux notions d'ensembles polaires : les ensembles polaires usuels de $\mathbf{R}^{2l}$ et les ensembles $\mathbf{C}'$ -polaires qui sont ceux où une fonction pluri-sous-harmonique peut s'annuler sans être identiquement nulle. Nous avons vu que p^* était pluri-sous-harmonique, mais il est impossible d'affirmer que l'ensemble où $p \neq p^*$ est $\mathbf{C}'$ -polaire ; par contre on sait que ce n'est pas non plus l'ensemble polaire le plus général (LELONG, [12], [13]).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BRELOT (Marcel). — *Éléments de la théorie classique du potentiel*. — Paris, Centre de Documentation universitaire, 1959.
- [2] CARATHÉODORY (Constantin). — *Funktionentheorie*. — Bâle, Verlag Birkhäuser, 1930.
- [3] CARTAN (Henri). — Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, t. 73, 1945 p. 74-106.
- [4] CARTAN (Henri). — Sur les suites de potentiels de masses ponctuelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 214, 1952, p. 994.
- [5] GEL'FAND (I. M.) et ŠILOV (G. E.). — *Fonctions généralisées. t. 2 : Espaces de fonctions fondamentales et de fonctions généralisées* [en russe]. — Moscou, 1958.
- [6] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur les espaces (F) et (DF) , *Summa Brasil. Math.*, t. 3, 1954, p. 57-123.
- [7] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J. Für reine und angew. Math.*, t. 192, 1953, p. 35-64.
- [8] GROTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Mem. Amer. math. Soc.*, 16).
- [9] HARTOGS (Fritz). — Zur Theorie der Analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihenwelche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Annalen*, t. 62, 1906, p. 1-88.
- [10] LELONG (Pierre). — Sur la capacité de certains ensembles de valeurs exceptionnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 214, 1942, p. 992.
- [11] LELONG (Pierre). — Les fonctions pluri-sous-harmoniques, *Ann. scient. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, p. 301-338.
- [12] LELONG (Pierre). — Fonctions pluri-sous-harmoniques au voisinage du sous-espace réel, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 251, 1960, p. 2860.
- [13] LELONG (Pierre). — Fonctions pluri-sous-harmoniques et fonctions analytiques de variables réelles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 11, 1961, p. 515-568.
- [14] LONG (Clifford). — *Schwartz distributions analytic in a parameter* (Thèse Sc. math., Univ. Illinois, 1960).
- [15] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1 (2^e éd.) et t. 2, Paris, Hermann, 1957 et 1951 (*Act. scient. et ind.*, 1238 et 1122).
- [16] SCHWARTZ (Laurent). — *Séminaire Schwartz*, année 1953-1954 : *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques*. — Paris, Secrétariat mathématique, 1954 (multigraphié).
- [17] SCHWARTZ (Laurent). — Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.
- [18] SEBASTIÃO E SILVA (José). — Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, *Rend. di Mat. e Appl. Roma*, t. 14, 1955, p. 388-410.
- [19] TRÈVES (François). — Opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, p. 1-73.
- [20] ZERNER (Martin). — Solution élémentaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3679.
- [21] ZERNER (Martin). — Une généralisation de la théorie de Hartogs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 251, 1960, p. 230-232.

(Manuscrit reçu le 28 juillet 1961.)

Martin ZERNER,

Attaché de Recherches au Centre National
de la Recherche Scientifique,
La Bastide Saint-Jacques, route de Tholonet,
Aix-en-Provence (Bouches-du-Rhône).

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Représentations indirectes des groupes de Lie

Vu et approuvé

Paris, le 13 juin 1963.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer .

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean ROCHE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Quai des Grands-Augustins, 55.

164027-63

Dépôt légal, Imprimeur, 1963, n° 1596

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Quai des Grands-Augustins, 55.

164027-63

Dépôt légal, Imprimeur, 1963, n° 1596

Imprimé en France